Anfangsgründe

EX LIBRIS
FF. EREMITARVM
ORDINIS
S. HIERONYMI
MONACHII.

Math. P.
5

<36622074090011 S

<36622074090011

Bayer. Staatsbibliothek
F, E, 0

Mathesis. Geometria generalis

268.

Math. P 5

R

Verf.: Leonhard Gruber

Anfangsgründe

der

Geometrie

und

Trigonometrie

zum

Gebrauch der Schulen

in den

churbaierischen Landen.

München 1776.

gedruckt und zu finden bey Johann Jakob Paul Vötter, gnädigst dekretirt churfürstl. Hof-Akademie- und Landschaftsbuchdruckern.

Anfangsgründe der Geometrie und Trigonometrie.

Königliche Staats-Bibliothek München
Bayerische Staatsbibliothek München

Imprimatur.

Sig. München in dem Churfürstl. Bücher = Censur - Collegio den 22. Merz 1776.

Wilhelm Wodiczka Secret.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK

Anfangsgründe der Geometrie.

vorläufige Erklärungen und Grundsätze.

§. 1. Erkl. die Geometrie ist eine Wissenschaft der Größen, in so fern man auf die Lage, Ordnung, und Verbindung der Theile siehet.

§. 2. Anm. So erklären Kästner, Clemm und andere die Geometrie. Ich will es versuchen, die Erklärung, und das, worin sie von der Erklärung der Arithmetik verschieden ist, durch ein Beyspiel zu erläutern. Man nehme zwo Kugeln von Wachs; da jede als ein Ganzes angesehen werden kann, so wür-

den sie zusammen zwey ganze ausmachen, und folglich durch die Zahl 2 können ausgedrückt werden. In diesem Falle wären die Kugeln ein Gegenstand der Arithmetik. Denn man siehet hier nicht darauf, ob es Kugeln sind; man könnte jeder eine andere beliebige Gestalt geben, und sie würden noch die zwey vorige Ganze ausmachen, wenn nichts vom Wachse hinzu käme, oder davon genommen würde. Man setze einmal, diesen zwoen Kugeln habe man die Gestalt von Würfeln gegeben. In diesem Falle würde die Ordnung und Verbindung der Theile schon anders seyn, als vorher, da es noch Kugeln waren. Alsdann könnte man Untersuchungen über die Größe der runden Gestalt der Kugeln, und der viereckichten Gestalt der Würfel anstellen. Und dieses wäre ein Gegenstand der Geometrie. Aus den nämlichen Gründen ist leicht zu sehen, daß in der Geometrie von geraden und krummen Linien, und dem verschiedenen Verhältnisse der Linien, Figuren und Körper gehandelt wird.

§. 3. Erkl. Ein geometrischer Körper (solidum, corpus geometricum) ist eine Ausdehnung nach allen Seiten. Eine geometrische Ausdehnung ist der Raum, den eine Größe ausfüllt, deren Theile so zusammen hängen, daß, wo einer aufhört, gleich der andere anfängt. Das unmittelbare zusammenhängen der Theile, wovon immer einer gleich da anfängt, wo ein anderer aufhöret, so daß zwischen des

ei=

einen Ende und des andern Anfange nichts ist, das nicht zu dieser Größe gehört, macht eine stetige Größe (continuum) aus.

§. 4. Erkl. Die Gränze eines Dings heißt dessen Aeußerstes, oder das, wo es aufhört. Die Gränzen eines Körpers heißen Flächen (superficies). Die Gränzen der Flächen heißen Linien, und die Gränzen der Linien, Punkte.

§. 5. Zus. Weil die Gränzen eines Körpers nicht mehr Körper seyn können; so hat die Fläche keine körperliche Ausdehnung. Folglich kann kein Körper aus geometrischen Flächen, wenn man gleich unendlich viele übereinander legte, entstehen. Eben so besteht die Fläche nicht aus Linien, weil die Linien nur Gränzen der Fläche sind. Und da der Punkt die Gränze der Linie ist; so ist er ohne alle Ausdehnung. Folglich hat der geometrische Punkt gar keine Theile, oder er ist untheilbar. Da er keine Theile hat; so kann auch eine Menge voneinander gesetzter Punkte keine Linie ausmachen. Dem ungeachtet darf man überall in der Linie Punkte annehmen; weil kein auch noch so kleiner Theil der Linie gedacht werden kan, der nicht einen Anfangs- und Endspunkt habe.

§. 6. Anm. Es ist ohne Erinnern schon offenbar, daß sich kein geometrischer oder mathematischer

Punkt, keine mathematische Linie und dergleichen zeichnen läßt. z. E. auch der subtileste Punkt, den man macht, ist ein klein Körperchen. Es scheinet demnach, als wenn sich die Geometrie mit Undingen beschäftigte, die nur in unserm Kopfe wirklich, und zu nichts zu gebrauchen sind. Man muß aber bedenken, daß die vorgedachten Begriffe allgemeine, abgesonderte Begriffe sind, deren Gegenstände freylich nicht so wirklich sind, wie wir sie uns in dieser Allgemeinheit vorstellen. Es ist z. E. die Tugend etwas wirkliches, aber nur in diesem oder jenem Menschen, nicht auf die Art ist die Tugend wirklich, wie wir sie uns abgesondert vorstellen. Und eben diese abgesonderten Begriffe gebrauchen wir oft im gemeinen Leben, ohne daß man behaupten wird, man hätte sich mit Undingen beschäftiget. Wenn man fragt, wie weit Regensburg von München entfernt sey; so fragt man unstreitig nur nach der Länge des Wegs; man fragt nicht, wie breit der Weg sey. Und man betrachtet also diesen Weg nur als eine Länge ohne Breite. Eben dieses geschiehet in der Geometrie in Ansehung der Linie. So auch, wer nach der Größe eines Ackers fragt, der denkt nur an die Oberfläche desselben, er stellet sich ihn als eine Ausdehnung in die Länge und Breite vor, und er denkt nicht daran, wie tief der Acker in die Erde gehe. Die mathematische Fläche wird auf diese Art ebenfalls betrachtet, man siehet sie an, als eine Ausdehnung, die allein eine Länge und Breite hat.

§. 7.

§. 7. Erkl. Eine *Linie* entstehet aus der Bewegung eines Punktes.

§. 8. Anm. Es wird durch diese Erklärung der Linie nicht gesagt, die Linie bestehe aus aneinander liegenden Punkten. Denn man kan sich keine Bewegung eines Punkts gedenken, ohne den Ort, den der Punkt jetzt einnimmt, und den Ort, den er gleich darauf einnimmt, in einiger Entfernung zu gedenken. Diese Entfernung ist also schon eine Länge, und also eine Linie, und eine große Linie bestehet aus solchen Entfernungen, das heißt aus unendlich vielen kleinern Linien, nicht aus Punkten.

§. 9. Erkl. Die Linien werden eingetheilt in gerade und krumme. Eine *gerade Linie* (linea recta) ist, deren Punkte alle nach einer Gegend liegen, wie A B in Fig. 1. Eine *krumme Linie* (linea curua) ist, deren jeder Punkt nach einer andern Gegend liegt. z. E. in Fig. 2. liegt der Punkt A nach der Gegend B, der Punkt C nach der Gegend E, und folglich schon höher als A u. s. w.

§. 10. Anm. Sowohl bey den alten als neuern Geometern findet man viele andere Erklärungen der geraden Linie. Man sehe z. E. Euclidis Element. 6. prior. libr. recogniti opera Christiani Melder Lugd. Batav. 1711. Doch bemerkt Hr. Hofrath

Kästner, daß niemand die gerade Linie aus irgend einer Erklärung kennen lernen wird, und man hat es auch nicht nöthig. Aber man könnte wohl etwas von ihr sagen, das unsre Aufmerksamkeit dahin leitet, auf das, was sie zu einer geraden Linie macht, genauer acht zu haben. Weil also alle gegebenen Erklärungen von der geraden Linie im genauen Verstande diesen Namen nicht verdienen, und man schon eine gerade Linie kennen muß, ehe man diese sogenanten Erklärungen verstehen kann, so sagt H. von Segner in der Geometrie: Es ist bekannt, was eine gerade Linie seye. Eine krumme Linie ist diejenige, in welcher kein Theil gerade ist." Uebrigens ist noch zu merken, daß auch eine Linie aus geraden und krummen zusammen gesetzt seyn kann.

§. 11. Erkl. Die Flächen werden eingetheilt in ebene und krumme Flächen. Eine ebene Fläche oder Ebene (superficies plana, planum) ist die, in der man von jedem Punkte zum andern gerade Linien ziehen kann, so daß alle Punkte dieser Linie in der Fläche liegen. Eine krumme Fläche (superficies curva) ist die, worin sich kein ebener Theil angeben läßt.

§. 12. Erkl. Ein ebener Winkel (angulus planus) ist die Neigung zwoer Linien gegen einander, die in einer Ebene liegen, und nicht eine einzige gerade Linie ausmachen (Fig. 3.). Die Linien AB,

BC,

BC, welche den Winkel einschließen, nennet man die Schenkel, oder die Seiten des Winkels (crura anguli); und den Punkt, in welchem die zween Schenkel zusammen stossen, die Spitze oder den Scheitel des Winkels (vertex).

§. 13. Anm. Man pflegt einen Winkel mit dreyerley Buchstaben zu nennen, wenn man ihn von andern unterscheiden will, wovon aber der, welcher am Scheitel stehet, allemal in der Mitte stehen muß z. E. Man sagt, der Winkel ABC, oder CBA (Fig. 3.) Man kan ihn aber auch mit einem grossen Buchstaben nennen, der an der Spitze stehet; z. E. der Winkel B, oder endlich durch einen kleinen hineingeschriebenen Buchstaben; z. E. der Winkel x.

§. 14. Anm. Man schreibt den Winkeln eine Größe zu; diese hängt aber nicht von der Länge ihrer Seiten, sondern bloß von ihrer Neigung gegeneinander ab. Wenn man in Fig. 3. die Seiten BA und BC noch so weit verlängerte; so bliebe doch noch die vorige Neigung der Linien, und der Winkel würde also nicht größer und nicht kleiner werden. Man betrachte aber in Fig. 4. den Winkel G, so haben da die Seiten eine andere Neigung, als in Fig. 3. Die Seite FG ist näher bey GH, und es ist also die Oefnung der Winkels G kleiner, als die, des Winkels B. Derohalben sind die Winkel selbst ungleich, wenn

schon

schon übrigens die Seiten des einen so groß, als die Seiten des andern wären. Wenn in Fig. 5. die Seite L K gegen L M so geneigt ist, wie in Fig. 3. B A gegen B C; so wird auch, wenn der Winkel K L M auf A B C gelegt wird, der Punkt L in B, die Seite L M, auf die Seite B C, die Seite L K auf die Seite B A fallen. Deswegen sind Winkel einander gleich, wenn einer in den andern dergestalt passet, daß, wenn man ihre Spitzen aufeinander legt, auch die Schenkel des einen Winkels auf die Schenkel des andern Winkels fallen; ohne daß man darauf siehet, ob die Schenkel von gleicher Länge sind. Ein Winkel A B C (Fig. 3.) ist also größer als ein anderer F G H (Fig. 4.), wenn die Schenkel im ersten mehr voneinander entfernt sind, als im andern.

§. 15. Erkl. Nebenwinkel (anguli contigui, seu deinceps positi) Fig. 6. sind A B C und D C B, welche einen Schenkel B C gemein haben, und deren beyde übrige Schenkel, A C und C D in einer geraden Linie A C D nach entgegengesetzten Seiten des gemeinschaftlichen Schenkels C liegen. Wenn eine gerade Linie B C (Fig. 7.) auf der andern A D so stehet, daß die Nebenwinkel A C B und B C D einander gleich werden, so sagt man, daß C B senkrecht oder lothrecht (perpendicularis, normalis.) auf A D stehe. Ein jeder Winkel aber, welchen zwo Linien einschließen, die aufeinander senkrecht stehen, heißt ein rech-

ter oder gerader Winkel (angulus rectus); wie z. E. in Fig. 7. BCD und BCA. Die gerade Linie CB (Fig. 6.), welche auf der andern AD so stehet, daß die Nebenwinkel ACB und BCD ungleich werden, stehet schief (obliqua) auf AD. Und es werden auch die Winkel ACB und BCD, welche von einer Linie, die auf der andern schief stehet, gemacht werden, schiefe Winkel (obliqui) genannt. Da nun einer von diesen Winkeln ACB größer ist, als ein rechter, der andere BCD aber kleiner als ein rechter; so nennet man den, der größer als ein rechter ist, einen stumpfen Winkel (obtusus), den hingegen, der kleiner als ein rechter, einen spitzigen (acutus).

§. 16. Erkl. Zwo in einer Ebene gezogene gerade Linien, welche, man mag sie auf beiden Seiten verlängern, wie man will, niemals zusammen stossen, heißen gleichlaufende oder Parallel-Linien. In Fig. 8. sind AB und CD Parallel-Linien. Zusammengehende Linien (conuergentes) heißen die, welche, wenn sie verlängert werden, zusammen stossen; wie Fig. 9. FG und MN. Wenn man sie auf der entgegengesetzten Gegend, wo sie zusammen stossen, verlängert, so heißen sie auseinanderfahrend (diuergentes).

§. 17. Erkl. Eine Fläche, welche mit Linien begränzt ist, heißt eine Figur. Die Linie, welche

die Figur begränzet, ist entweder krumm, oder aus krummen und geraden Linien allein, oder endlich aus krummen und geraden Linien zugleich zusammengesetzt. Die Linien, welche die Figur begränzen, heißen mit einem Wort der **Umfang** (Perimeter) der Figur. Jede Linie aber einzeln genommen, aus welcher der Umfang zusammen gesetzt ist, heißt eine **Seite** der Figur. Sind alle Seiten, welche die Figur begränzen, gerade Linien, so ist die Figur **geradelinicht** (rectilinea).

§. 18. **Erkl.** Ein **Kreis** (circulus) entstehet, wenn sich eine gerade Linie AC um den festen Punkt C in einer Ebene herumdrehet, bis sie wieder in die vorige Lage kömmt (Fig. 10.). Die krumme Linie, welche durch die Bewegung des Punkts A beschrieben wird, heißt der **Umkreis** (Peripheria), und der Punkt C, um welchen sich die Linie CA bewegt, der **Mittelpunkt** (Centrum). Jede gerade Linie AC, CB, welche aus dem Mittelpunkt bis zur Peripherie gezogen wird, heißt der **Halbmesser** (Semidiameter, Radius) Jede gerade Linie FG (Fig. 11.), welche von einem Punkte der Peripherie F zum andern G gezogen wird, eine **Sehne** (chorda) und wenn die Sehne durch den Mittelpunkt gehet, wie MN (Fig. 11.), der **Durchmesser** (Diameter). Jeder Theil des Umkreises AB (Fig. 10.) heißt ein **Bogen** (Arcus). Ein Stück der Kreisfläche ACB (Fig. 10.),

welches zwischen zweenen Halbmessern AC und CB und ihrem Bogen AB enthalten ist, heißt ein Ausschnitt (Sector). Und ein Stück der Kreisfläche FPGF (Fig. 11.), welches zwischen der Sehne FG und dem Bogen FPG enthalten ist, heißt ein Abschnitt (Segmentum).

§. 19. Zus. Alle Halbmesser eines und eben desselben Kreises sind einander gleich, jeder nämlich = CA (Fig. 10.). In der 11. Fig. sind die beiden Halbmesser CN + CM = dem Durchmesser MN, und CG + CH = dem Durchmesser HG. Da nun die Halbmesser gleich sind; so sind auch die Durchmesser eines Cirkels einander gleich.

§. 20. Anm. Man wird von selbst wohl einsehen, daß es außer dem Cirkel noch viele andere Figuren geben kann, welche in krumme Linien eingeschlossen sind. In der Elementargeometrie, die hier abgehandelt wird, kömmt aber bey Auflösung der Aufgaben keine andere krumme Linie als die Cirkel-Linie vor. Daher werden alle vorfallende Arbeiten hier durch gerade Linien und den Kreis verrichtet. Und deswegen sagt man auch, daß man eine Aufgabe geometrisch aufgelöset habe, wenn man nur den Kreis und gerade Linien bey der Auflösung gebraucht, und dabey den Grund zeigen kann, warum man auf diese und keine andere Art verfahren sey. Alle andere Auflösungen

gen

gen, wobey man andere Hilfsmittel, als z. B. Instrumente gebraucht, nennt man mechanische.

§. 21. Willkührl. Satz. Man theilet jeden Umkreis, oder jede Peripherie eines Cirkels in 360 gleiche Theile, weil sich diese Zahl durch viele andere ohne Bruch dividiren läßt. Einen solchen 360sten Theil der Peripherie nennet man einen Grad. Einen Grad theilt man wieder in 60 gleiche Theile und ein solcher 60ster Theil eines Grads heißt eine Minute. Der 60ste Theil einer Minute heißt ferner eine Secunde. Und wenn man noch weiter gehen will, der 60ste Theil einer Secunde eine Terze. Man bezeichnet die Grade mit o, die Minuten mit ($'$), die Secunden mit ($''$), die Terzen mit ($'''$) u. s. w.

Ex. $24^\circ\ 18'\ 5''\ 13'''$ hieße 24 Grad, 18 Minuten, 5 Secunden, 13 Terzen.

§. 22. Zus. Man kann auf den Diameter A B (Fig. 12.) einen andern Diameter D E so setzen, daß auf jeder Seite der Linie A B die beiden Nebenwinkel gleich werden; z. E. daß A C D = B C D, und A C E = B C E werde. Solchergestalt wären A C D, D C B und A C E, E C B rechte Winkel (§. 15.), und der ganze Cirkel enthielte vier rechte Winkel. Da aber die Peripherie in 360 Grade eingetheilt ist (§. 21.), so wäre jeder Bogen, der zwischen den zweenen

Schen-

Schenkeln eines rechten Winkels enthalten ist, der vierte Theil von 360°, oder = 90°. Es erhellet also, daß jeder rechte Winkel 90° enthalte.

§. 23. Zus. Da der rechte Winkel 90 Grad enthält; und diese 90° in einem Cirkelbogen sind, welcher aus dem Mittelpunkt des Cirkels zwischen den Schenkeln des Winkels beschrieben worden, so ist ein solchergestalt beschriebener Bogen das Maaß eines rechten Winkels. Spitzige und stumpfe Winkel können durch den rechten ausgemessen werden. Man darf nur untersuchen, nachdem man aus der Spitze des Winkels einen Bogen zwischen seinen Schenkeln beschrieben hat, wie viel Grad der spitzige oder stumpfe alsdann bekömmt, welches durch Instrumente geschehen kann, wie nachgehends noch deutlicher gezeigt werden wird.

§. 24. Zus. Da jeder Cirkel, er mag groß oder klein seyn, in 360° eingetheilet wird; so ist es gleichgültig, ob man mit einer großen oder kleinen Eröffnung des Cirkels einen Bogen, als das Maaß des Winkels zwischen den Schenkeln desselben beschreibt; denn die Anzahl der Grade ist ja allemal einerley, nur sind sie in einem größern Bogen größer, in einem kleinern kleiner. Wenn man z. B. in Fig. 13. aus einem Mittelpunkt C, zween Cirkel beschreibt, und die Halbmesser CA und CB ziehet; anbey an-

nimmt,

nimmt, daß B A das Maaß des Winkels B C A der vierte Theil der Peripherie oder = 90° sey; so ist b a ebenfalls der vierte Theil von seiner Peripherie, oder ebenfalls = 90°, nur daß hier die Grade kleiner als im ersten Falle sind. Der Winkel B C A wird nämlich nicht verändert, man mag den Bogen groß oder klein aus dem Mittelpunkt C machen. Es würde aber der Winkel verändert werden, wenn man seine Schenkel näher zusammen, oder weiter voneinander setzte: und da würde dann auch der Winkel größer oder kleiner als ein rechter werden, und nothwendig einen andern Bogen zu seinem Maaß bekommen. Hieraus ist offenbar, daß gleiche Winkel auch ein gleiches Maaß haben, und wenn ihr Maaß gleich ist, so sind die Winkel selbst gleich.

§. 25. Erkl. Eine geradlinichte Figur, welche in drey Seiten eingeschlossen ist, nennet man ein Dreyeck (Triangulum); welche in vier Seiten eingeschlossen ist, ein Viereck: alle Figuren, die in mehr als vier Seiten eingeschlossen sind, heißen Vielecke (Polygona).

§. 26. Anm. Die Vielecke benennet man im Deutschen so wie im Griechischen nach der Zahl der Winkel, z. E. Fünfeck, Sechseck, Siebeneck, u. s. w. (pentagonum, hexagonum, heptagonum).

§. 27. Erkl. Man kann erstens die Dreyecke in Ansehung der Seiten betrachten, und wenn alle drey Seiten von einer Größe sind (Fig. 14.), so ist es ein gleichseitiges Dreyeck (Triangulum aequilaterum). Sind aber nur zween Schenkel A C, C B (Fig. 15.) über der Grundlinie A B von einer Größe; so ist es ein gleichschenklichtes (aequicrurum, isosceles). Ist keine Seite der andern gleich, so ist es ein ungleichseitiges (scalenum) Fig. 16.

Betrachtet man zweytens die Winkel, so ist ein Dreyeck rechtwinklicht (triangulum rectangulum), wenn es einen rechten Winkel A hat (Fig. 17.), Stumpfwinklicht (obtusangulum) das einen stumpfen Winkel F hat (Fig. 18.). Spitzwinklicht (acutangulum), das lauter spitzige Winkel hat (Fig. 14. und 15.).

§. 28. Erkl. Wenn in einem Viereck alle vier Seiten gleich und alle Winkel rechte sind, so heißt es ein Quadrat (Fig. 19.). Sind aber die gegenüberstehenden Seiten gleich, wie in Fig. 20. A B = C D und A C = B D, und alle Winkel rechte, so ist es ein Rechteck (Rectangulum oblongum). Sind alle Seiten gleich, und die Winkel schief; so ist es eine Raute (Rhombus) Fig. 21. Sind endlich die gegenüberstehenden Seiten gleich, und die Winkel schief; so ist es eine länglichte Raute (Rhomboi-

des) Fig. 22. Andere Vierecke, welche ungleiche Seiten haben, heißen Trapezien (Fig. 23.).

§. 29. Erkl. Ein Parallelogramm ist eine viereckichte Figur, darinn die gegenüberstehenden Seiten gleich sind (Fig. 19. 20.).

§. 30. Erkl. Die Vielecke werden eingetheilt in ordentliche und unordentliche. Ein ordentliches Vieleck (Polygonon regulare) hat lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel (Fig. 24.). Ein unordentliches Vieleck (irregulare) hat dieses nicht (Fig. 25.).

§. 31. Anm. Durch diese Erklärungen sind nur die Bedeutungen der Wörter bestimmet worden; und die Geometern behaupten damit noch nicht, daß solche Dinge vorhanden oder möglich sind. Es muß sich erst im folgenden zeigen, ob diese Erklärungen nicht irgend etwas widersprechendes enthalten, und ob die erklärten Dinge selbst möglich sind.

§. 32. Erster Heischesatz. Durch jede zween gegebene Punkte eine gerade Linie zu ziehen, und solche nach Gefallen zu verlängern oder zu verkürzen.

§. 33. Zweyter Heischesatz. Aus jedem Mittel-

tel-

telpunkt mit jedem beliebigen Halbmesser einen Kreis zu beschreiben.

§. 34. Erster Grundſ. Durch jede zween gegebene Punkte kann nur eine gerade Linie gezogen werden. Ueberhaupt wird durch zween Punkte die Lage (positio) und durch die zween Endpunkte die Größe (Magnitudo) einer geraden Linie gegeben.

§. 35. Zuſ. Zwo gerade Linien können alſo keinen Raum einſchließen, denn wenn die zwo geraden Linien A B, C D (Fig. 26.) einen Raum einſchließen ſollten, ſo müßten die Endpunkte der einen mit den Endpunkten der andern zuſammen ſtoſſen. Man verlängere A B (§. 32.), daß ſie = C D werde; und lege den Endpunkt A auf C und B auf D, ſo fallen dieſe Punkte und die ganzen Linien aufeinander. Zwiſchen zweenen Punkten iſt aber nur eine gerade Linie möglich. Folglich macht A B, wenn ſie auf C D gelegt iſt, nur eine gerade Linie aus, und ſchließt keinen Raum ein.

§. 36. Zuſ. Alſo müſſen auch in jedem Dreyecke jede zwo Seiten z. E. A C und A B (Fig. 14.) größer ſeyn, als die Dritte. Denn wären dieſe zwo Seiten der dritten C B gleich oder kleiner als ſelbige, ſo könnten ſich dieſe zwo Seiten A C, A B nicht er-

reichen, sondern fielen in die Grundlinien hinein, und machten also wieder eine gerade Linie; folglich würden sie keinen Raum einschließen (§. 35.).

§. 37. Zweyter Grunds. Wenn zween Winkel einerley Maaß haben, so sind sie einander gleich, und wenn sie gleich sind, so haben sie einerley Maaß.

§. 38. Dritter Grunds. Zwo gerade Linien decken (congruunt) einander, wenn sie so können übereinander gelegt werden, daß die Endpunkte der einen, und alles, was dazwischen enthalten ist, auf die Endpunkte und das dazwischen enthaltene der andern fallen. Gerade Linien, die einander decken, sind gleich groß, und umgekehrt: gerade Linien von einerley Größe decken einander.

§. 39. Vierter Grunds. Zween Winkel decken einander, wenn die Spitze des einen auf die Spitze des andern, und der Schenkel des einen auf den Schenkel des andern gelegt wird; und alsdann auch der zweyte Schenkel des einen auf den zweyten Schenkel des andern fällt. Gleiche Winkel decken einander; und Winkel, die einander decken, müßen gleich seyn.

§. 40. Fünfter Grundsatz. Zwo Figuren decken einander, wenn sie dergestalt aufeinander können

nen

nen gelegt werden, daß die Gränzen der einen und alles, was dazwischen enthalten ist, auf die Gränzen und das dazwischen Enthaltene der andern fallen. Figuren, die einander decken, sind gleich. Es folgt aber nicht: Figuren, die gleich sind, decken einander. Wenn man z. B. (Fig. 27.) das Quadrat durch die Linie B C in zween gleiche Theile theilte; so wäre das Dreyeck B C D die Hälfte des Quadrats. Man kann aber dieses Quadrat noch auf eine andere Art in zween gleiche Theile theilen; wenn nämlich A C und B D in zween gleiche Theile getheilt, und die Linie F G gezogen wird. Da wäre dann F G C D ebenfalls die Hälfte vom Quadrat; und folglich dem Dreyeck B C D gleich. Und doch decken diese Figuren nicht einander. Aber gleiche und ähnliche Figuren decken einander.

Wenn aber eine Figur der andern ähnlich seyn soll, so wird dazu erfordert, daß 1.) beide einerley Anzahl der Seiten haben. Es ist derohalben das Dreyeck keinem Viereck ähnlich. 2.) Daß in beiden Figuren einerley Winkel in einerley Ordnung aufeinander folgen; und 3.) daß die Seiten, welche einerley Winkel in beiden Figuren einschließen, gleiche Verhältniße gegeneinander haben, oder, welches das nämliche ist: daß die Seiten in beiden Figuren, welche einerley Winkel einschließen, in einerley Ordnung Proportionen ausmachen. Man betrachte z. B. ein Quadrat, und ein Rechteck (Fig. 19. und 20.). Da ha-

ben zwar beide Figuren einerley Anzahl von Seiten, auch folgen in beiden einerley Winkel in einerley Ordnung aufeinander; aber die Seiten, welche in dem Quadrat die Winkel einschließen, haben ein anders Verhältniß gegeneinander, als die Seiten, welche sie im Rechteck einschließen. Nämlich im Quadrat verhalten sich jede zwo Seiten gegeneinander, wie 1 zu 1, weil sie gleich sind, im Rechteck haben sie dieses Verhältniß nicht. Folglich ist das Quadrat und Rechteck aus diesem Grunde unähnlich.

§. 41. Anm. Die Grundsätze §§. 38. 39. 40. werden das Principium congruentiae genannt. Es ist aber überdas in Acht zu nehmen, daß nur gleiche Linien; gleiche und ähnliche Figuren einander decken. Im gemeinen Leben hat das Wort Decken oft einen andern Verstand. Da würde man z. E. sagen: ein ganzer Bogen Papier deckt ein Quartblatt. In geometrischer Bedeutung wäre dieses unrichtig. Denn weder der Bogen deckt das Quartblatt; noch das Quartblatt den Bogen, wenn es auf denselben gelegt würde; weil sie nicht einander gleich sind.

I. Abschnitt.

Von Linien, Winkeln, und Figuren in Ansehung ihrer Gleichheit.

§. 42. Heischesatz. Zwo gerade Linien durchschneiden sich nur in einem Punkte; und der Punkt, worinn sie sich durchschneiden, ist beiden Linien gemein.

§. 43. Lehrs. Wenn in einem Dreyecke A B C ein Winkel B dem Winkel b eines andern Dreyecks a b c gleich ist, und auch die Seiten, welche diesen Winkel einschließen, von einerley Größe sind A B = a b und B C = b c; so sind auch die ganzen Dreyecke einander gleich; und die dritte Seite A C = a c, auch die übrigen Winkel, welche zwischen gleichen Seiten liegen, einander gleich A = a und C = c (Fig. 28.).

Bew. Man lege das Dreyeck a b c auf A B C, so, daß der Punkt a auf A und a b längst A B fällt; so fällt auch b auf B (§. 38.) und b c auf B C (§. 38.). Da also a auf A, b auf B und c auf C liegt; so decken auch a c und A C einander (§ 34.); ingleichen die Winkel a, A, und c, C; und die Fläche des ganzes Dreyecks a b c deckt die Fläche des

Dreyecks ABC, oder alles dieses ist einander gleich (§. 40.).

§. 44. Zus. Zwo Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bestimmen derohalben ein Dreyeck.

§. 45. Lehrs. Wenn in zweyen Dreyecken ABC und abc (Fig. 28.) zween Winkel des einen zweenen Winkeln des andern gleich sind; nämlich A = a und C = c, auch überdas eine Seite des einen der Seite des andern gleich ist, welche an den gleichen Winkeln liegt AC = ac; so sind die ganzen Dreyecke einander gleich, der dritte Winkel B = b und auch die Seiten, welche zwischen gleichen Winkeln liegen, sind einander gleich; nämlich AB = ab und BC = bc.

Bew. Man lege ac auf AC, so fällt der Punkt a auf A und c auf C (§. 38.). Da nun aber auch die Winkel a = A und c = C; so fallt ab auf AB und cb auf CB (§. 39.). Also liegt b zugleich in AB und BC; folglich auf B, und die Dreyecke decken einander wieder, und sind daher gleich (§. 40.). Der dritte Winkel b ist = B und die Seite ab = AB, ingleichen bc = BC.

§. 46. Zus. Eine Seite und zween Winkel bestimmen daher ein Dreyeck.

§. 47. Lehrs. Wenn in zweyen Dreyecken alle Seiten einander gleich sind, nämlich A B = a b, B C = b c, A C = a c, so sind die Dreyecke selbst einander gleich, und auch die Winkel, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden; sind einander gleich, A = a, B = b, C = c (Fig. 29.).

Bew. Man beschreibe aus A mit A B den Bogen p q, und aus C mit C B den Bogen n m; da nun a c = A C ist; so decken diese Linien einander (§. 38.), und a fällt auf A, c auf C. Man trage ferner a b auf A in einen Punkt des Bogens p q; worinn also b zu liegen kömmt. Eben so trage man b c aus C in einen Punkt des Bogens n m; und es kömmt also wieder b in einen Punkt des Bogens n m zu liegen. Da b in n m und p q zugleich liegt; so kann dieses kein anderer Punkt als B seyn. Da nun a auf A, c auf C, und b auf B liegt; so decken die Dreyecke einander (§. 40.), und sind gleich, so wie die Winkel, welche gleiche Seiten in beiden Dreyecken einschließen, auch einander gleich sind. a = A, c = C, b = B.

§. 48. Zus. Aus dreyen Seiten läßt sich nur ein Dreyeck machen, ob man solchem gleich verschiedene Stellungen geben kann.

§. 49. Aufg. Ueber einer gegebenen Linie C B ein gleichseitiges Dreyeck zu beschreiben (Fig. 30.).

Aufl.

Aufl. Man setze den Cirkel in B, öffne ihn bis C, und beschreibe damit über der Linie C B einen Bogen aus B. Mit unveränderter Eröffnung setze man den Cirkel in C, und beschreibe ebenfalls einen Bogen, der den vorigen durchschneidet. Aus dem Durchschnittspunkte A ziehe man die Linien A C und A B, so ist A C B gleichseitig.

Bew. Es ist A B = C B gemacht worden, und auch A C = C B. Also ist auch A B = A C (Arithm. §. 25.). Das Dreyeck ist also gleichseitig.

§. 50. Aufg. Aus dreyen gegebenen Seiten, deren jede zwo zusammengenommen größer sind, als die dritte, ein Dreyeck zu beschreiben.

Aufl. Es seyen die gegebenen Seiten A B, B C, C A (Fig. 31.): so ziehe man eine unbegränzte gerade Linie a b, und mache a b = A B. Man fasse B C mit dem Cirkel, und beschreibe aus b einen Bogen; ebenfalls fasse man C A mit dem Cirkel, und beschreibe mit dieser Eröffnung aus a einen Bogen, der den vorigen durchschneidet; aus dem Durchschnittspunkt c ziehe man gerade Linien nach a und b; so ist a c b das verlangte Dreyeck.

Bew. Es ist A B + B C vermöge der Annahme größer als C A, und B C + C A größer als A B,

und

und C A + A B größer als B C; also erhellet erstlich, daß ein Dreyeck aus den gegebenen Linien kann gemacht werden (§. 36.). Da nun im Dreyecke a b c die Seite ab = A B, bc = B C und ca = C A gemacht worden; so ist a b c auch das verlangte Dreyeck.

§. 51. Zus. Aus zwoen gegebenen Seiten A B, B C (Fig. 32.) ließe sich ein gleichschenklichtes Dreyeck beschreiben. Man nehme A B als die Grundlinie an, und mache solche = a b. Man fasse mit dem Cirkel B C, und beschreibe mit einerley Eröffnung aus b und a Bogen, die sich durchschneiden, und zeichne dann das Dreyeck völlig aus. Wenn der eine gegebene Schenkel B C nicht größer ist, als die Hälfte der Grundlinie A B, so könnte man über diese Grundlinie kein Dreyeck beschreiben (§. 36.).

§. 52. Aufg. An eine gegebene gerade Linie A B, und einen in derselben gegebenen Punkt einen Winkel zu setzen, der einem gegebenen C gleich sey.

Aufl. Man schneide auf den beiden Schenkeln des gegebenen Winkels C zwey Stücke C D, C E nach Willkühr ab, und ziehe die Linie D E. Hierauf beschreibe man auf der geraden Linie A B, von dem gegebenen Punkt A an, ein Dreyeck (§. 50.) in welchem

chem AF = CE, AB = CD, und BF = ED; so ist der Winkel A = dem gegebenen C.

Bew. Denn da die drey Seiten des Dreyecks GAF den dreyen Seiten des Dreyecks ECD gleich gemacht worden sind; so ist der Winkel A = C (§. 47.).

§. 53. Anm. Es wird diese Aufgabe mechanisch aufgelöset, wenn der Winkel in Graden gegeben ist. Dieses geschiehet durch Hilfe des Transporteurs, eines Instruments, womit man sowohl Winkel mißt, als auch andere einem gegebenen Winkel gleich machen kann. Der Transporteur hat gemeiniglich die Gestalt eines halben Cirkels, dessen Peripherie in 180. Grade eingetheilt ist, an dem Durchmesser ist der Mittelpunkt durch einen scharfen Einschnitt bemerkt. Wenn man einen Winkel damit messen will; so legt man den Mittelpunkt des Transporteurs an die Spitze des Winkels, und rückt das Instrument, bis die innere Schärfe des Durchmessers an den einen Schenkel des Winkels streichet. Alsdann kann man die Grade zählen, welche zwischen die Schenkel des Winkels fallen. Will man einen andern Winkel mit diesem Instrumente dem gemessenen gleich machen; so ziehet man eine gerade Linie, und legt den Mittelpunkt des Transporteurs an einen beliebigen Punkt der Linie. Hierauf zählt man so viel Grade ab, als der gemessene Winkel hat, und bemerkt die Größe des Bogens durch ein

Zei=

Zeichen. Man ziehet von diesem gemachten Zeichen an den Punkt, wo der Mittelpunkt des Transporteurs gelegen hat, eine gerade Linie, so ist dieses der verlangte Winkel. Dieses Verfahren läßt sich leicht begreifen, wenn man es nur irgend ein oder zweymal ausüben sieht.

§. 54. Aufg. Aus zwoen gegebenen A B, A C Seiten eines Dreyecks und Winkel, den diese beiden Seiten einschließen, ein Dreyeck zu machen (Fig.34.).

Aufl. Man ziehe eine unbestimmte Linie, und mache selbige so groß, als eine der gegebenen z. E. es sey a b = A B gemacht. An den Punkt a trage man den Winkel A nach §. 52. oder wenn A in Graden gegeben ist, so setze man diesen Winkel mit dem Transporteur (§. 53.) an a; endlich mache man auf diesen andern Schenkel des Winkels a, die Linie a c = A C, und ziehe c b; so ist a c b das verlangte Dreyeck.

§. 55. Aufg. Aus einer gegebenen Seite A B und zweenen Winkeln A und B ein Dreyeck zu beschreiben (Fig. 35.).

Aufl. Man ziehe wieder eine unbestimmte Linie, mache sie so groß, als die gegebene A B. An den Punkt a setze man den Winkel A, und an den Punkt b den Winkel B nach §. 52. Oder wenn die Winkel

in

in Graden gegeben sind, so setze man sie mit dem Transporteur an beide Punkte. Man verlängere die Seiten, welche die Winkel einschließen, bis sie sich in c durchschneiden; so ist a c b das Dreyeck, das zu verfertigen war.

§. 56. Aufg. Einen gegebenen Winkel A in zween gleiche Theile zu theilen (Fig. 36.).

Aufl. Auf den Schenkeln des Winkels A nehme man nach Gefallen A B = A C. Aus den Punkten B und C beschreibe man mit beliebiger Eröffnung des Cirkels zween Bogen, die sich durchschneiden. Aus dem Durchschnittspunkt beider Bogen D ziehe man die Linie D A in die Spitze des Winkels, so ist B A D oder D A C die Hälfte des ganzen Winkels B A C.

Bew. Man ziehe die Linien B D und C D. Da A B = A C und B D = D C gemacht worden, überdas noch A D = A D oder beiden Dreyecken B A D und A D C gemein ist; so sind in diesen genannten Dreyecken drey Seiten des einen den drey Seiten des andern gleich, und folglich sind beide Dreyecke selbst einander gleich (§. 47.). Auch die Winkel sind gleich, welche von gleichen Seiten eingeschlossen werden (§. cit.): oder B A D = D A C.

§. 57. Zus. Durch fortgesetztes Halbiren läßt

sich der vorgegebene Winkel in 4, 8, 16 u. s. w. Theile theilen. Man kann aber durch die Elementargeometrie den Winkel nicht in drey Theile theilen, außer in dem Falle, da es ein rechter ist. Es ist dieses die unter den Alten so berühmte Aufgabe de trisectione anguli. S. Kästner Analys. endlicher Größen §. 50. und Hausen Element. Geom. Sect. Con. p. 45. Boscowich. Element. Sect. Conic.

§. 58. Aufg. Eine gerade Linie A B (Fig. 37.) in zween gleiche Theile zu theilen.

Aufl. Man beschreibe mit willkührlicher Eröffnung des Cirkels ein gleichschenklichtes Dreyeck über der Linie A B. Ebenfalls beschreibe man unterhalb der Linie ein solches Dreyeck A B D, und ziehe aus C und D eine gerade Linie. Diese wird die vorgegebene A B in E halbiren.

Bew. Da A C = C B, A D = D B gemacht worden, und C D den beiden Dreyecken A D C und D C B gemein ist, so sind beide Dreyecke einander gleich (§. 47.), und folgends auch der Winkel o = x. Da nun in den Dreyecken A C E und C E B o = x, A C = C B und C E = C E, so sind in beiden zwo Seiten und der eingeschlossene Winkel einander gleich, und folglich die Dreyecke A C E, E C B sind selbst einander gleich (§. 43.): also auch A E = E B.

§. 59.

§. 59. Aufg. Aus einem gegebenen Punkte C innerhalb einer geraden Linie AB (Fig. 38.) eine Perpendicularlinie aufzurichten.

Aufl. Man setze den Cirkel in C und durchschneide die Linie auf beiden Seiten mit beliebiger, doch gleicher Eröffnung des Cirkels in D und E. Aus D und E mache man wieder mit willkührlicher aber gleicher Eröffnung des Cirkels einen Durchschnitt in F, und ziehe durch C und F eine gerade Linie CF, so stehet diese senkrecht auf AB.

Bew. Es ist DC = CE und DF = FE gemacht worden, überdas FC = FC. Also das Dreyeck DCF = FCE (§. 47.), und folglich auch o = x. Sind aber die zween Nebenwinkel einander gleich, so stehet FC senkrecht auf AB (§. 15.)

§. 60. Aufg. Aus einem gegebenen Punkte C außerhalb der geraden Linie AB einen Perpendickel zu fällen (Fig. 39.).

Aufl. Man setze den Cirkel in C ein, und durchschneide die Linie AB mit beliebiger, doch gleicher Eröffnung in D und E; aus D und E mache man mit einerley Eröffnung des Cirkels einen Durchschnitt in F, und ziehedurch C und F die Linie CG; so stehet selbige senkrecht auf AB.

Bew.

Bew. Da D C = C E, D F = F E und C F = C F, so ist das Dreyeck D C F = C F B (§. 47.). Folglich ist auch der Winkel D C G = dem Winkel G C E (§. cit.); und da ferner D C = C B und C G = C G, so ist auch das Dreyeck D G C = dem Dreyecke G C B (§. 43.) und der Winkel D G C = E G C (§. cit.). Da nun diese gleichen Winkel Nebenwinkel sind, so stehet C G senkrecht auf A B (§. 15.).

§. 61. Anm. Den Durchschnittspunkt F kann man auch über C machen, wie auch auf der entgegengesetzten Seite des Punktes F. Im letzten Falle würde es einerley seyn mit 37. Fig.

§. 62. Lehrs. Die beiden Nebenwinkel A B D und D B C sind allezeit zusammen genommen zweenen rechten gleich, oder sie betragen 180° (Fig. 40.).

Bew. Man richte aus B einen Perpendikel B G auf (§. 59.), und R mag einen rechten Winkel bedeuten. Nun ist A B G + G B C = 2 R und G B D + D B C = G B C: folglich A B G + G B D + D B C = 2 R. Es ist aber A B G + G B D = A B D. Also A B D + D B C = 2 R.

§. 63. Zus. Wenn man noch mehrere Linien nach dem Punkte B, auf der einen Seite von A C zöge;

so würden alle diese Winkel doch nur 2 rechte oder 180 Grade zusammen betragen (Fig. 41.).

§. 64. Zus. Ziehet man auf der andern Seite der Linie A C auch Linien nach B, so werden alle diese Winkel zusammengenommen, die am Punkte B auf beiden Seiten von A C liegen, vier rechte Winkel, oder 360° ausmachen. Denn A B D + D B E + E B C = 2 R (§. 63.), und A B F + F B C = 2 R. (§. cit.); folglich wenn man gleiches zu gleichem addirt: A B D + D B E + E B C + A B F + F B C = 2 R + 2 R = 4 R oder 360°.

§. 65. Zus. Ist einer von den Nebenwinkeln bekannt; so weiß man auch die Größe des andern. Da beide 180° zusammen ausmachen, so darf man nur den gegebenen von 180° abziehen, und es wird des andern Größe bekannt.

§. 66. Lehrs. Wenn eine gerade Linie eine andere schneidet, so sind die bey dem Scheitel entgegengesetzten Winkel A B C, D B E, die man auch Verticalwinkel nennet, einander gleich (Fig. 42.).

Bew. A B C + C B E = 2 R (§. 62.); C B E + E B D = 2 R (§. cit.). Da also zwo Größen einer dritten gleich sind, so ist A B C + C B E = C B E + E B D. Oder wenn man den gemeinschaftli-

chen

chen Winkel CBE auf beiden Seiten wegnimmt, so ist ABC = EBD. Eben so zeigt sich, daß CBE = ABD.

§. 67. Lehrs. Wenn zwo gerade Linien AB, CD von einer dritten durchschnitten werden, daß (Fig. 43.).

I. Die beiden innern entgegen gesetzten Winkel o und x zusammen zweenen rechten gleich sind;

II. Der äußere m dem innern entgegengesetzten x gleich ist,

III. Die Wechselwinkel (anguli alterni) y und x einander gleich sind; so sind die Linien AB, CD parallel.

Bew. I. Vermöge der Bedingung ist also $o + x = 2 R$, und wenn dieses ist, so wird behauptet, daß die Linien AB und CD parallel seyen. Dieses kann aber so erwiesen werden. $y + o = 2 R$, weil es Nebenwinkel sind (§. 62.); $u + x = 2 R$, aus dem nämlichen Grunde. Folglich, wenn man gleiches zu gleichem addirt $y + o + u + x = 2 R + 2. R$. Da nun vermöge der Annahme $o + x = 2 R$; so bleibt, wenn man dieses letztere vom ersten abziehet $y + u = 2 R$. Hieraus ist also offenbar, daß, wenn auf der einen Seite die beiden Winkel $o + x = 2 R$ sind, nothwendig auf der andern

Seite die beide $y + u$ auch $= 2R$ seyn müßen. Man nehme also an, daß wenn $o + x = 2R$ ist, die Linien nicht parallel seyen, und daß sie folglich auf der Seite, wo diese Winkel liegen, zusammenstossen, wie GD in der 44. Figur. Da aber auf der andern Seite die Winkel $y + u$ auch $= 2R$, so müßte AB auch auf dieser Seite CD durchschneiden, wie z. E. GH thut. Also schnitte die gerade Linie AB die andere CD in zweenen Punkten. Dieses kann aber nicht geschehen (§. 42.). Weil dieses nun unmöglich ist, so kann auch AB mit CD nicht zusammenstossen, und beide müssen derohalben gleichlaufend seyn.

II. Da $m = x$ und $m + o = 2R$; so ist, wenn man statt m den ihm gleichen Winkel x setzt, auch $x + o = 2R$. Ist aber $x + o = 2R$, so sind auch die Linien parallel, wie schon Nr. I. erwiesen worden.

III. Da wieder vermöge der Bedingung $y = x$ und $y + o = 2R$ ist (§. 62.); so ist auch, wenn man für den Winkel y den ihm gleichen x setzt, $x + o = 2R$. Es ist aber schon Nr. I. erwiesen, daß in diesem Falle die Linien parallel seyen. Ein Satz von diesen dreyen als der erste angenommen hat die übrigen allemal zu Folgen.

§. 68. Zus. Wenn $o + x$ kleiner als zween

rechte

rechte Winkel wäre, so wäre u + y größer als zween rechte oder 180°, und die Linien fließen da zusammen, wo die Summe der beiden innern Winkel kleiner als 2 R ist. Denn, wenn man o + x kleiner als 2 R annimmt, so ist dieses so viel, als nähme man B G F größer als o an (Fig. 44.), daß also G D zwischen die zwo gleichlaufenden Linien A B, H D fällt, und endlich die H D erreicht.

§. 69. Zus. Durch einen Punkt G kann nur mit C D eine einzige Parallele A B gezogen werden. Jede andere würde C D schneiden, und wenn sie diese schneidet, so wird sie auch die andere A B schneiden (Fig. 44.).

§. 70. Lehrs. Wenn zwo Linien A B, C D (Fig. 43.) parallel sind, so ist

I. Die Summe der beiden innern entgegengesetzten Winkel zweenen rechten oder 180° gleich, oder o + x = 2 R.

II. Ist der äußere m dem innern entgegengesetzten x gleich.

III. Sind die Wechselwinkel y und x einander gleich.

Diese drey Sätze sind die umgekehrten des 67. §. und sie fließen nach den Regeln der Conversion daraus.

aus. Doch kann man die Wahrheit dieser Sätze aus den vorausgesetzten Gründen folgender gestalt zeigen.

Bew. I. Wenn die Linien AB, CD parallel sind, so machen die innern entgegengesetzten Winkel entweder 2 R zusammen aus, oder nicht. In dem letzten Falle muß entweder o + x kleiner als 2 R, oder größer als 2 R seyn. Man nehme das erste an, daß sie zusammen kleiner seyen; alsdann würde aber AB mit CD zusammen stossen (§. 68.) und folglich nicht mehr parallel seyn, wie doch angenommen wird. Derohalben können beide Winkel nicht kleiner als 2 R seyn. Sollten o + x zusammen größer als 2 R seyn, so würden die beiden Winkel y + n auf der andern Seite kleiner als 2 R werden (§. 68.), und es würden die Linien wieder auf dieser Seite zusammenstossen, wo y + n kleiner ist, als 2 R. Also wäre AB wiederum nicht parallel mit CD, wie doch angenommen worden. Da also, wenn die Linien parallel sind, o + x weder größer noch kleiner als 2 R seyn können, so folgt, daß sie genau 2 R ausmachen müssen.

II. Wenn die Linien parallel sind, so ist nach Nr. I. dieses Satzes (Fig. 43.) $o + x = 2R$; nun ist auch $o + m = 2R$; folglich $o + x = o + m$; und wenn man den gemeinschaftlichen Winkel o beiderseits wegnimmt $x = m$.

III.

III. Nach Nr. II. dieses Satzes ist $x = m$. Es ist aber überdas $y = m$ (§. 66.) : also $x = y$.

§. 71. Anm. Diese Lehre von den Parallelen hat den Geometern von jeher viel zu schaffen gemacht. Den Zusatz §. 68. nahm Euklides als einen Grundsatz (Axioma) ohne Beweis an. Geminus und Proclus widersprachen dem Euklides, und schlossen selbigen aus der Zahl der Grundsätze aus. Manche streiten darüber, ob letzterer oder ersterer Recht habe. Der berühmte Clavius hat in seiner Ausgabe des Euklides einen Beweis hinzu gefügt. Man ist hier den besten und einsichtsvollesten Geometern gefolget, welche diesen Satz, als einen Zusatz anführen, weil er ganz natürlich aus der Hauptproposition folgt. Auch ältere Geometern haben dieses Verfahren erwählet. In den 6 ersten Büchern des Euklides, die Christian Melder, und Jakob Bernard zu Leyden 1711. herausgegeben haben, stehet bey diesem euklideischen Grundsatze die Anmerkung: quicquid dicat Auctor (das sich auf Melder beziehet, der den Euklides vertheidiget) haec propositio euidens non est, sed haberi potest pro Corollario propositionis XXVIII. Lib. I. Mit einem Worte: große Männer finden hier Schwierigkeiten. Der Satz §. 67. läßt sich wohl scharf erweisen, aber wenn man ihn umwendet, so geräth man leicht auf Trugschlüße. Hr. Hofr. Kästner meldet in der Vorrede zu der Arithm. und Geom.

daß eben diese Schwierigkeiten ihn viele Jahre beschäftiget haben, und daß er anfänglich geglaubt habe, sie wären in Hausens Elementis Mathes. völlig gehoben. Er habe aber nachgehends auf Erinnern des Mr. Coste entdeckt, daß eben von Hausen ein Schluß gemacht worden, der nicht folge. Am Ende sagt Hr. Hofr. "Ich wollte also, daß die Lehrer der Logick, die von der Conversion so viele Regeln geben, uns an diesem Exempel den Nutzen ihrer hochgepriesenen Kunst zeigten u. s. w." Der hier vorgetragene Beweis ist aus Kästner, mit einigen kleinen Veränderungen, die Hr. Prof. Ebert hat. Wolf hat wieder einen andern Beweis. Der Beweis setzt aber voraus, daß die Perpendicularlinien, welche zwischen Parallele gezogen sind, gleich seyen. Dieses ist wahr, aber es ist erst eine Folge aus dem Beweis. Giebt man aber von den Parallelen die Erklärung, daß sie solche Linien seyen, die auf einer gegebenen senkrecht stehen, so ist der Beweis richtig, und scharf genug. Euklides wollte aber diese Definition nicht geben, sondern erst aus der seinigen folgern. Wer mit Wolfen diese, oder eine andere ähnliche Definition voraus setzt, kann, wie gesagt, alle Lehren von den Parallelen geometrisch streng beweisen. Hr. Prof. Klügel in Helmstädt, hat auf Anrathen, und unter dem Vorsitz des Hrn. Hofr. Kästner die Geschichte dieser Lehre in einer Dissertation 1763. vorgetragen. Sie hat den Titel: Conatuum praecipuorum Theoriam

riam parallelarum demonstrandi recensio. Man findet in dieser Schrift acht und zwanzigerley Versuche angeführt, um den Satz zu beweisen, die alle denen, welche sie angestellet, werth geschienen haben, der gelehrten Welt vorgelegt zu werden. Der Beweis, den der Hr. geheimde Rath von Segner sowohl in den Vorlesungen der Arith. und Geometr. als auch in den kleinen Anfangsgründen giebt, verdient sonderlich nachgesehen zu werden. Auch Herr Profeßor Büsch macht in dem zweyten Theil seiner Encyclopedie pag. 27. über diese Lehrsätze eine gute Anmerkung.

§. 72. Zus. Wenn die Linie EF eine von den Parallelen unter dem rechten Winkel o schneidet, so wird der andere x auch ein rechter Winkel seyn: denn da $o + x = 2R$, und vermöge der Annahme $o = R$ ist; so bleibt, wenn man dieß letzte von ersterem subtrahirt, $x = R$ (Fig. 45.).

§. 73. Zus. Folglich wenn in einer viereckichten Figur, deren gegenüberstehende Seiten parallel sind, ein rechter Winkel A befindlich ist, so müssen alle rechte seyn (Fig. 46.). Denn da $A = R$, so ist auch $C = R$ (§. 72.). Und da auch AC mit BD parallel ist, und beide von CD durchschnitten werden, so ist $D = R$ (§. 72.), weil $C = R$. Und auf diese Art gehet der Schluß fort.

§. 74. Aufg. Durch einen gegebenen Punkt C eine Linie zu ziehen, die mit einer andern gegebenen geraden Linie A B parallel sey (Fig. 47.).

Aufl. Man ziehe willkührlich durch den Punkt C eine gerade Linie, welche die A B durchschneidet, z. E. E F. An den Punkt C setze man nach §. 52. einen Winkel, der dem x gleich ist, und verlängere die Linie N C, so wird M N mit A B parallel seyn.

Bew. Da x = y gemacht worden, und dieses Wechselwinkel sind, so müssen freylich die Linien M N, und A B mit einander gleichlaufend seyn (§. 67.).

§. 75. Anm. Man hat besondere Instrumente, womit man Parallelen ziehet. Es ist dieses das sogenannte Parallel-Lineal. Selten aber ist dieses Instrument gut; und wenn es gut ist, so werden die Banden, womit die zwo Lineale aneinander gehängt sind, leicht schlapp. Wer viel zu arbeiten hat, gebraucht statt diesem ein Lineal und rechtwinkelichtes Dreyeck. Hiermit kann man nicht allein sehr bequem genaue Parallelen ziehen, sondern auch Perpendicularlinien. Man sehe Penthers praxis geometriae.

Aus dem angeführten ist auch von sich selbst klar, wie diese Parallelogramen beschrieben werden können. Wenn eine Seite C D (Fig. 19.) gegeben wäre, und

man

man sollte ein Quadrat verfertigen; so richte man am Endepunkt der CD eine Perpendicularlinie auf, und mache diese = CD. Aus A und D mache man mit CD zween Bogen, die sich in B durchschneiden, und ziehe DB, BA. Sollte ein Rechteck gezeichnet werden; so müssen zwo Seiten CD, CA (Fig. 20.) gegeben seyn. Man setzt diese beide wieder rechtwinkelicht aneinander, und macht die gegenüberstehenden Seiten einander gleich; das dadurch leicht geschiehet, wenn man aus D mit der Linie AC einen Bogen, und mit CD einen Bogen aus A beschreibt, die sich einander durchschneiden, alsdann AB, BD ziehet. Eine Raute kann aus einer gegebenen Linie CD (Fig. 21.) und einem gegebenen Winkel C gezeichnet werden; nämlich an den Punkt C wird der gegebene Winkel gesetzt, und CA = CD gemacht; hierauf macht man wieder aus A und D mit CD zween Bogen, die sich in B durchschneiden; so kann AB, BD, gezogen werden. Endlich aus zwoen gegebenen Linien CD, CA, und dem Winkel C (Fig. 22.) wird die länglichte Raute gezeichnet, wenn man an CD den gegebenen Winkel C setzet, und CA so groß, als die andere gegebene Linie macht; nachdem aus D mit AC, und aus A mit CD einen Bogen beschreibt, die sich in B durchkreutzen, und AB, BD ziehet.

§. 76. Lehrs. Parallelen zwischen Parallelen sind einander gleich.

Bew.

Bew. Es sey Fig. 48. AB parallel mit CD, und BD parallel mit AC. Wenn nun noch die Linie AD aus einer Spitze des Winkels A in die gegenüberstehende Spitze D gezogen wird, welche man die Diagonallinie nennet; so ist x = y und m = n, weil es Wechselwinkel sind. Da nun auch AD = AD; so ist das Dreyeck CAD = dem Dreyeck ABD (§. 45.), und also auch AB = CD, und AC = BD (§. cit.).

§. 77. Zus. In einer viereckichten Figur, worinn die gegenüberstehenden Seiten parallel sind, sind jede zwo gegenüberstehende Seiten auch gleich (§.76.).

§. 78. Lehrs. Wenn die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so sind auch die gegenüberstehenden Seiten parallel.

Bew. Es sey (Fig. 48.) AB = CD, AC = BD, und da auch AD = AD, so ist das Dreyeck ACD = ABD (§. 47.), und x = y; ingleichen m = n. Es sind aber x und y Wechselwinkel; wenn nun diese gleich sind, so ist AB mit CD parallel. Eben aus dem nämlichen Grunde ist BD mit CD parallel.

§. 79. Zus. Da Quadrat, Rechteck, Rhombus, Rhomboides gegenüberstehende gleiche Seiten

haben

haben (§§. 19. 20. 21. 22.), so sind auch diese Seiten parallel (§. 78.) und folglich diese vier Figuren Parallelogramme (§. 29.).

§. 80. Zus. Ein Parallelogramm wird durch die Diagonale in zwey gleiche Dreyecke C A D, A D B getheilet (§. 76.). Die gegenüber stehenden Winkel sind einander gleich, nämlich A = D und C = B. Denn es ist, weil die Dreyecke gleich sind B = C, x = y, und n = m. Also x + n = y + m, oder A = D. Die beiden Winkel, die an einer Seite liegen, betragen zusammen 180°, oder 2 R. Es ist dieses aus §. 67. klar. Weil A C mit B D parallel ist, und beide von C D durchschnitten werden, so sind allerdings die beiden innern Winkel C + D = 2 R (§. 67.). Und auf die nämliche Art wird gezeigt, daß D + B = 2 R.

§. 81. Lehrs. In einem jeden Dreyecke A B C (Fig. 49.) ist die Summe aller drey Winkel o + y + x zweenen rechten Winkeln, oder 180° gleich.

Bew. Man ziehe durch die Spitze C eine gerade Linie D E parallel mit A B (§. 74.), so sind m und o, ingleichen n und y Wechselwinkel, und folglich einander gleich (§. 67.). Da also m = o, n = y und x = x, so ist, wenn man gleiches zu gleichem addirt, m + n + x = o + y + x. Es ist aber

$m + n + x = 180°$ oder $= 2 R$ (§. 63.): folglich auch $o + y + x = 180°$ oder $= 2 R$.

§. 82. Zus. Wenn einer von den Winkeln eines Dreyecks ein rechter Winkel ist, so ist die Summe der beiden übrigen auch einem rechten Winkel, oder 90° gleich; und jeder dieser beiden Winkeln einzeln genommen, ist kleiner als ein rechter; folglich ein spitziger. In einem Dreyecke kann derohalben nur ein einziger rechter Winkel seyn; da nämlich die beiden übrigen zusammengenommen erst einem rechten gleich sind.

§. 83. Zus. Hätte aber ein Dreyeck einen stumpfen Winkel, so wäre die Summe der beiden übrigen Winkel kleiner als ein rechter, und also spitzig. Jeder dieser zween Winkel einzeln genommen, wird deswegen um desto mehr spitzig seyn. Es kann kein Dreyeck aus den angeführten Gründen einen stumpfen und rechten Winkel haben, und eben so wenig kann es zween stumpfe Winkel haben.

§. 84. Zus. Da alle drey Winkel in einem Dreyecke zusammen genommen 180° oder 2 R ausmachen; so müssen jede zween Winkel des Dreyecks zusammen genommen kleiner als 180° oder 2 R seyn. Ist nun diese Summe von den zween Winkeln irgend kleiner, als 90° oder R; so muß der dritte Winkel im Drey-

ecke ein stumpfer seyn. Wäre aber die Summe = 90° = R, so müßte der dritte Winkel ein rechter seyn. Wäre endlich die Summe größer, als ein rechter, so ist der dritte Winkel gewiß spitzig.

§. 85. Zus. Ist die Summe zweener Winkel in einem Dreyecke bekannt, so weiß man auch die Größe des dritten. z. E. Es sey (Fig. 49.) $o = 52°$ und $y = 35°$ gegeben, so ist $o + y = 87°$. Da nun $o + y + x = 180°$, so subtrahire man die Summe beider, von der Summe aller drey Winkel, so bleibt $x = 93°$. Hingegen, wenn nur ein Winkel gegeben ist, so kann man nur die Summe der beiden übrigen finden, nicht aber die Größe eines jeden besonders. z. E. es sey $x = 82°$, so ist $o + y = 98°$.

§. 86. Zus. Sind in zweyen Dreyecken zween Winkel des einen so groß, als zween Winkel des andern, so muß auch der dritte Winkel des einen dem dritten des andern gleich seyn.

§. 87. Lehrs. In einem gleichschenklichtem Dreyecke sind die Winkel an der Grundlinie, oder die den gleichen Schenkeln entgegenstehen, einander gleich.

Bew. In dem gleichschenklichten Dreyecke A B C (Fig. 50.) theile man nach §. 56 den Winkel C in zween gleiche Theile, und ziehe die Linie C D. Da

also

also vermöge der Bedingung A C = C B, und überdas C D = C D ist, auch o = x gemacht worden, so sind in den zwey Dreyecken A C D, und D C B zwo Seiten, und der eingeschlossene Winkel des einen den zwo Seiten, und dem eingeschlossenen Winkel des andern gleich; und folglich die Dreyecke auch selbst einander gleich (§. 43.). Daher dann auch A = B oder die Winkel an der Grundlinie des gleichschenklichten Dreyecks A C B in einander gleich sind (§.cit.).

§. 88. Zus. In einem gleichschenklichten Dreyecke sind alle drey Winkel gegeben, wenn nur einer bekannt ist. Denn entweder ist einer von den gleichen Winkeln an der Grundlinie gegeben oder nicht. Ist das erste; so darf man den gegebenen Winkel an der Grundlinie nur verdoppeln, und diese Summe der zween Winkel von 180° abziehen, so weiß man auch den dritten (§. 84.). Ist aber der Winkel, der nicht an der Grundlinie liegt, gegeben, so findet man die Größe eines jeden der beiden, die an der Grundlinie liegen, wenn man den gegebenen von 180° abziehet, und den Rest halbirt, oder durch 2. dividirt.

§. 89. In einem gleichseitigen Dreyecke sind 1.) alle Winkel gleich. Es sey (Fig. 50.) ein solches Dreyeck, so ist, weil A C = C B auch A = B (§. 87.), und weil in einem gleichseitigen Dreyecke auch B C = B B, so ist ebenfalls nach §. cit. C = A. Da nun nicht

hier zwo Grössen einer dritten gleich sind, auch B = C; folglich sind jede zween Winkel, wie man sie auch nimmt, einander gleich. Es muß derowegen 2.) jeder Winkel eines gleichseitigen Dreyecks = 60° seyn, oder = $\frac{2}{3}$ R. Denn die drey Winkel eines jedes Dreyecks, oder A + B + C = 180° (Fig. cit.). Da nun in dem gleichseitigen Dreyecke B = A und C = A, so ist A + A + A = 180°, oder 3 A = 180°; das ist, wenn man beiderseits mit 3 dividirt A = 60, folglich auch B = 60, C = 60, weil diese = A. Da ein rechter Winkel = 90°, so ist der dritte Theil davon oder $\frac{1}{3}$ R = 30°, und dieses zweymal genommen, oder $\frac{2}{3}$ R = 60°. Es ist also gleichgültig, ob man sagt, der Winkel eines gleichseitigen Dreyecks ist = 60°, oder ob man sagt, er ist = $\frac{2}{3}$ R.

§. 90. Lehrs. Wenn in einem Dreyecke A B C (Fig. 50.) die Winkel an der Grundlinie einander gleich sind, so ist das Dreyeck gleichschenkelicht.

Bew. Es ist nach der Bedingung A = B, oder die Winkel an der Grundlinie sind gleich. Nun theile man wie vorher den Winkel C wieder in zween gleiche Theile, so ist auch o = x. Es muß also auch der dritte Winkel A D C in dem einen Dreyecke dem dritten Winkel C D B in dem andern Dreyecke gleich seyn (§. 87.). Da vermöge des bisherigen Beweises

o = x, ADC = CDB, und auch die Seite CD beiden Dreyecken gemein ist, oder CD = CD; so sind in beiden, eine Seite und die zween anliegenden Winkel einander gleich, und die Dreyecke CAD und CDB sind deswegen selbst einander gleich (§. 45.), wie auch CA = CB (§. cit.), oder die zween Schenkel des Dreyecks ACB sind gleich; und das Dreyeck ist folglich gleichschenkelicht (§. 27.).

§. 91. Zus. Sind in einem Dreyeck alle drey Winkel einander gleich; so sind auch die drey Seiten von einer Größe, oder es ist ein gleichseitiges Dreyeck. In Fig. 50. mögen die drey Winkel einander gleich, oder A = B = C seyn. Aus A = B folgt, daß AC = CB sey (§. 90.). Aus B = C folgt, daß BA = CA sey. Es ist deswegen auch BA = CB, oder jede zwo Seiten, wie man sie auch nimmt, sind alsdann gleich.

§. 92. Lehrs. Wenn in einem Dreyecke ABC (Fig. 51.) eine Seite AB verlängert wird, so ist der äußere Winkel o so groß, als die beiden innern entgegengesetzten, nämlich als x + m.

Bew. In einem jeden Dreyecke ist x + m + n = 2R (§. 81.). Nun ist aber auch n + o = 2R (§. 62.). Folglich x + m + n = n + o; oder wenn man beiderseits den gemeinschaftlichen Winkel n subtrahirt, so ist x + m = o. S.

§. 93. Zus. Ist der äußere Winkel gegeben, so weiß man die Summe der beiden innern entgegengesetzten, und man findet dann die Größe des dritten Winkels, wenn man den äußern von 180° abziehet.

§. 94. Zus. Der äußere Winkel ist in einem gleichschenklichten Dreyecke zweymal so groß, als einer von den entgegengesetzten innern, wenn die innern Winkel die Winkel an der Grundlinie sind. Und der Winkel an der Grundlinie ist die Hälfte von dem äußern Winkel.

§. 95. Aufg. In einer jeden geradelinichten Figur die Summe aller Winkel zu finden, welche die Seiten der Figur einschließen.

Aufl. Es sey z. B. das Fünfeck ABCDE gegeben; so ziehe man aus einem willkührlichen Punkt F innerhalb der Figur nach allen Winkeln gerade Linien. Dadurch bekömmt man so viele Dreyeckt, als die Figur Seiten hat. Da nun in jedem Dreyecke die Winkel zusammen genommen = 180° sind (§. 81.), so betragen sie in diesen fünf Dreyecken fünfmal 180°. Nun aber machen alle Winkel, welche um den Punkt F herum liegen, und zu der Figur nicht gehören 360° aus. Wenn man also diese 360° abziehet; so werden die übrigen Winkel der Dreyecke, deren Summe mit

der Summe der Winkel in der Figur einerley ist, übrig bleiben.

Exempel. Im Fünfecke ist 5 × 180 = 900, davon 360 abgezogen, läßt 540.

Auf eine andere Art kann man auch so verfahren. Man ziehe aus einem Punkt A die Diagonalen A C, A D, so bekömmt man allemal zwey Dreyecke weniger, als die Figur Seiten hat. Und die Winkel der Dreyecke machen zugleich die Winkel der Figur aus. Wenn man daher 180° mit der Zahl der Seiten der Figur weniger zwey multiplicirt; so findet man die Summe aller Winkel.

Exempel. Im Fünfecke ist die Zahl der Seiten 5; nimmt man also 2 weniger, das ist 3, und multiplicirt dieses mit 180° so bekömmt man 3 × 180 = 540, wie vorher. Beide Auflösungen lassen sich allgemein so ausdrücken. Es sey die Zahl der Seiten = n; so muß nach der ersten 180° oder 2 R mit der Zahl der Seiten multiplicirt werden, das ist n × 2 R. Hiervon werden aber 360° oder 4 R subtrahirt; also ist der Ausdruck n × 2 R — 4 R.

Im zweyten Falle wäre die Anzahl der Seitenfigur weniger 2 = n — 2; und dieses mit 180° oder 2 R multiplicirt = (n — 2) 2 R.

§. 96. Zus. Die Figur mag ein ordentliches oder unordentliches Vieleck seyn, so kann man nach vor-

vorstehenden §. die Summe aller Winkel finden. In einem ordentlichen Vielecke sind die Seiten und Winkel gleich (§. 30.), und da kann man auch jeden Winkel, den zwo Seiten des Vielecks miteinander machen, oder den Vieleckwinkel (angulus polygoni) einzeln finden. Da nämlich alle Winkel eines ordentlichen Vielecks einander gleich, und so viele Winkel darinn sind, als das Vieleck Seiten hat, so darf man nur die Summe aller Winkel durch die Anzahl der Seiten dividiren; so bekömmt man die Größe eines Winkels.

Exempel. Im Fünfeck ist die Summe der Winkel = 540, dieses mit 5 dividirt, giebt 108.

Ueberhaupt würde die Größe eines Winkels gefunden werden, wenn man (n — 2) 2 R durch die Anzahl der Seiten oder n dividirte, das ist $\frac{(n-2)\,2\,R.}{n}$

§. 97. Zus. Unter allen dreyseitigen Figuren ist das gleichseitige Dreyeck nur eine ordentliche Figur, und unter allen vierseitigen nur das Quadrat.

§. 98. Lehrs. Parallelogramme, die zwischen einerley Parallelen und über einer Grundlinie stehen, sind gleichen Inhalts.

Bew. Es sey (Fig. 54.) AF parallel mit CH, und das Parallelogramm ABCD hat mit dem Pa-

rallelogramme EFCD einerley Grundlinie CD. Da in einem Parallelogramme die gegenüberstehenden Seiten gleich sind (§. 29.); so ist AB = CD, insgleichen EF = CD; folglich AB = EF. Man addire beiderseits BE; so ist AB + BE = EF + BE, oder AE = BF. Da nun auch AC = BD (§. 29.), und CE = FD (§. cit.); so ist das Dreyeck AEC = dem Dreyecke BDF (§. 47.). Man ziehe sowohl von AEC, als BDF das Dreyeck BGE ab; so ist ACE — BGE = BDF — BGE, oder das Trapezium ABCG = dem Trapezium EGDF. Man addire zu jedem dieser Trapezien das Dreyeck CGD; so erhält man ABCG + CGD = EGDF + CGD, oder Parallelogr. ABCD = Parallelogr. EFCD. Man drückt auch diesen Lehrsatz so aus: Parallelogrammen, deren Grundlinien und Höhen einander gleich sind, haben auch gleichen Inhalt. Die Höhe heißt nämlich ein Perpendikel, das von der gegenüberstehenden Seite auf die Grundlinie gefället wird. Nun sind alle diese Perpendikel gleich, und deswegen haben die Linien, welche durch ihre Endpunkte gezogen werden; eine gleiche Entfernung voneinander, und sind also parallel.

§. 99. Zus. Zwey Dreyecke sind von gleichem Inhalt, wenn sie gleiche Grundlinien haben, und zwischen einerley Parallelen stehen. Es haben (Fig. 55.) die Dreyecke ACD, CDB einerley Grund-

Linie CD, und stehen zwischen den Parallelen AB und CD. Man ziehe durch den Punkt D eine Linie parallel mit CA, und durch den nämlichen Punkt noch eine parallel mit CB; so sind die Parallelogramme ACDF und BGDC einander gleich (§. 98.). Folglich ist auch $\frac{1}{2}$ ACDF = $\frac{1}{2}$ BGDC. Es ist aber das Dreyeck ACD = $\frac{1}{2}$ ACDF (§. 80.), und das Dreyeck CDB = $\frac{1}{2}$ BGDC (§. cit.). derohalben beide Dreyecke von gleichem Inhalt; oder ACD = CDB. Man kann auch wieder sagen: Dreyecke, die gleiche Grundlinien und Höhen haben, sind gleichen Inhalts. Die Höhe des Dreyecks ist wieder das Perpendikel, das man aus der Spitze auf die gegenüberstehende Grundlinie fället. Manchmal fällt das Perpendikel außerhalb des Dreyeckes, und dann muß man die Grundlinie verlängern, bis sie dem Perpendikel begegnet; wie z. E. im Dreyecke CDB in dieser Figur wäre das Perpendikel BH, und fiele außerhalb der Grundlinie CD.

§. 100. Zus. Ein Dreyeck DEC (Fig. 56.), das gleiche Grundlinie und Höhe mit einem Parallelogramme ABDE hat, ist nur die Hälfte des Parallelogrammens. Denn, wenn man die Diagonale AE im Parallelogramme ziehet; so ist das Dreyeck ADE = $\frac{1}{2}$ ADEB (§. 80.). Nun ist aber das Dreyeck ADE = DEC (§. 99.). Derowegen

auch DEC = $\frac{1}{2}$ ADEB. Wenn daher die Grundlinie DE des Parallelogramms ABDE halb so groß ist, als die Grundlinie des Dreyecks DEC, und beide überdas gleiche Höhe haben; so ist das Parallelogramm dem Dreyecke gleich. Aus diesen Sätzen kann leicht gezeigt werden, wie man ein gegebenes Parallelogramm in ein Dreyeck von gleichem Inhalt, und wechselweise ein Dreyeck in ein Parallelogramm verwandeln könne.

§. 101. Lehrs. In einem rechtwinkelichten Dreyecke BAC (Fig. 57.) ist das Quadrat, das man über der Seite BC, die dem rechten Winkel A entgegenstehet, beschreiben kann; so groß als die zwey Quadrate zusammen genommen, die man über den Seiten BA und AC beschreiben kann, welche den rechten Winkel einschließen.

Bew. Man verlängere BA und mache AD = AC. Man ziehe CE parallel mit AD, und mache auch CE = AD; endlich durch die Punkte D und E ziehe man DE, so ist selbige = AC (§. 77.). Weil nun BAC ein rechter Winkel ist, so muß der Nebenwinkel CAD auch ein rechter seyn (§. 62.). Ist aber CAD ein rechter, so ist auch D, ingleichen E und C = R (§. 73.). Da auch überdas alle Seiten gleich gemacht sind, so ist ADCE ein Quadrat. Auf die nämliche Art wird gezeigt, daß auch

GB:

GBFA ein Quadrat sey. Denn es ist hier wieder AC verlängert, und $FA = BA = FG = GB$ gemacht worden. Und da wieder $BAC = R$, so ist auch $BAF = R$ (§. 62.). Jngleichen $F = R$, $G = R$, $B = R$ (§. 73.). Endlich errichte man bey C eine Perpendiculare CH, ziehe BI parallel der CH, und mache beyde der BE gleich. Durch die Punkte I und H ziehe man IH, so ist BICH ebenfalls ein Quadrat; weil alle einer Seite gleich gemacht, und bey C, folglich auch bey H, I, und B rechte Winkel sind (§. 73.).

Man ziehe nun ferner aus B nach E die Linie BE, und aus A nach H die Linie AH, und hernach ziehe man noch durch den Punkt A die Linie AK parallel mit CH; so ist $y = x$, weil beide rechte Winkel sind, und $o = o$. Wenn man nun diesen gemeinschaftlichen Winkel hinzu addirt, so wird $y + o$ $x + o$: oder der Winkel BCE = dem Winkel ACH. Es ist aber auch $BC = CH$, und $CE = AC$ gemacht worden; weil es Seiten von Quadraten seyn sollen. Folglich sind in dem Dreyecke BCE zwo Seiten, und der eingeschlossene Winkel gleich den zwo Seiten, und dem eingeschlossenen Winkel im Dreyecke ACH; und daher das Dreyeck BCE = dem Dreyecke ACH (§. 43.). Es hat aber das Dreyeck BCE gleiche Grundlinie und Höhe mit dem Quadrat ACDE, und ist daher die Hälfte dieses Quadrats (§. 100.); oder es ist $BCE = \frac{1}{2} ACDE$.

Also

Also $\frac{1}{2}$ ACDE = dem Dreyecke ACH. Ebenfalls hat das Dreyeck ACH gleiche Grundlinie und Höhe mit dem Parallelogramm LCKH; deswegen ist auch wieder ACH = $\frac{1}{2}$ LCKH (§. cit.). Und es wird aus diesem Grunde $\frac{1}{2}$ ACDE = $\frac{1}{2}$ LCKH. Weil nun die Hälften gleich sind; so sind auch die ganzen gleich, oder ACDE = LCLH.

Wenn man aus G nach C, ingleichen aus I nach A gerade Linien ziehet; so wird vollkommen auf die nämliche Art bewiesen, daß GFBA = BLIK. Das ist, wenn man gleiches zu gleichem addirt ACDE + GFBA = LCKH + BLIK. Diese zwey letzten Parallelogramme sind aber dem Quadrat BCHI gleich; und es wird ACDE + GFBA = ACHI.

In dem griechischen heißt die größte Seite eines rechtwinkelichten Dreyeckes die *Hypothenuse* und eine Linie, welche auf der andern senkrecht stehet, der *Kathetus*. Daher wird dieser Lehrsatz auch so ausgedrückt: In einem rechtwinkelichten Dreyecke ist das Quadrat der Hypothenuse so groß, als die beiden Quadrate der Katheten zusammen genommen; und wenn man diesen Lehrsatz auf das kürzeste vorstellen will, so setzt man $BC^q = CA^q + BA^q$ oder auch $BC^2 = CA^2 + BA^2$. Das kleine q bedeutet hier Quadrat, und daß BC^2 ebenfalls dieses bedeute, ist

aus

aus der Algebra bekannt. Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Figur, so sieht jeder gleich von selbst, daß diese das nämliche in Zeichen ausgedrückt, was der Lehrsatz in Worten gesagt hat.

§. 102. Anm. Der vorhergehende Lehrsatz wird von dem Erfinder Pythagoras, der pythagorische Lehrsatz genannt; und er ist in der ganzen Mathematik vom größten Nutzen. Einige nennen ihn eben aus der Ursache Magister Matheseos. Pythagoras selbst hielt ihn für so wichtig, daß er zur Danksagung den Göttern eine Hekatombe geopfert hat. Nach der gemeinsten Erklärung bedeutet eine Hekatombe ein Opfer von 100. Ochsen. Man kann aber das nicht zusammen reimen, wie Pythagoras so viele Thiere geopfert habe, da er es doch für Sünde hielt, die Thiere umzubringen. Man sehe Ovid. Metamorph. Die Gelehrte haben daher durch sonderbare Erklärungen diesen Widerspruch zu heben gesucht. Die wahrscheinlichste Meynung ist wohl die: aus Homer ist offenbar, daß Hekatombe nicht allein ein Opfer von 100 Ochsen, sondern auch von jeder unbestimmten Anzahl geringern Viehes, als Schaafen, Ziegen und dergleichen bedeutet; ja daß dieses Wort überhaupt ein grosses Opfer angezeigt habe. Vielleicht haben nun die Schüler des Pythagoras, oder er selbst den Werth von einem grossen Opfer für diese Erfindung an die Priester gegeben. Doch mag diesem seyn, wie ihm will;

es ist nichts daran gelegen. Wir sind zufrieden, daß wir den Lehrsatz haben. Der Beweis, so wie er hier vorgetragen ist, ist aus Euklides, den auch die meisten andern Schriftsteller gebrauchen. Sonst giebt es noch andere Beweise davon, wie man z. E. aus la Caille sehen kann. Der berühmte Ries, als er Profeßor zu Wittenberg war, gab im Jahr 1766 einen Beweis aus der Differentialrechnung, und er hat dadurch, wie er selbst schreibt, das zweyte Dutzend Beweise dieses Lehrsatzes voll gemacht, da schon vorher 23 bekannt waren. Man kann sich auch mechanisch von der Wahrheit dieses Lehrsatzes überzeugen. Man zeichne z. E. einen rechten Winkel, und gebe einem Schenkel 4 gleiche, und dem andern 3 gleiche Theile; und ziehe die dritte Linie oder die Hypothenuse, so wird man finden, daß selbige genau 5 von den nämlichen Theilen enthält. Es ist aber $5^2 = 25$; $4^2 = 16$, $3^2 = 9$ und $25 = 16 + 9$. Die Algebra zeigt, wie man überhaupt zwo Zahlen finden könne, deren Quadrate zusammen genommen dem Quadrate einer dritten Zahl gleich seyen. S. Kästner Analys. endl. Größen. In einem stumpfwinkelichten Dreyeck ist das Quadrat der größten Seite größer als die Quadrate der zwoen Seiten zusammen genommen, die den stumpfen Winkel einschließen, und in einem spitzwinkelichten kleiner. Um wie viel es aber eigentlich in jenem größer und in diesem kleiner sey, zeigt Euklides Libr. II.

§. 103.

§. 103. Zus. Ein Quadrat kann zweyen andern gegebenen gleich gemacht werden. Man dürfte nur die zwo Seiten der gegebenen Quadrate rechtwinkelicht aneinander setzen, und die Hypothenuse ziehen; so wäre das Quadrat, welches über der Hypothenuse beschrieben werden kann, den andern beiden gleich (§.101.). Wie z. E. in der 58. Fig. Da wäre, wenn AB, CB die Seiten der gegebenen Quadrate wären $AB^2 = AC^2 + CB^2$. Wollte man drey, vier und mehrere Quadrate in eins verwandeln; so setze man die gegebene Seite AD des Quadrats wieder rechtwinkelicht auf die Hypothenuse AB; so ist wieder, wenn DB gezogen wird, $DB^2 = AD^2 + AB^2$. Da nun $AB^2 = AC^2 + CB^2$, so ist $DB^2 = AD^2 + AC^2 + CB^2$, oder so groß, als die drey gegebenen Quadrate. Wenn man nun wieder auf DB die Seite eines vierten gegebenen Quadrats setzte; so fände man auch wieder eine Seite, deren Quadrat vier gegebenen gleich wäre; und so immer fort.

§. 104. Zus. Auf die nämliche Art verfährt man, wenn man ein Quadrat sucht, das doppelt, drey, viermal u. s. w. so groß ist, als ein gegebenes. Es sey in Fig. 58. die Seite BC in einem Quadrate gegeben, und man verlangt ein Quadrat, das dreymal so groß ist, als das von BC; so setze man an BC eine Linie AC unter einen rechten Winkel; und mache AC=BC; es ist alsdann auch $AC^2 = BC^2$. Da nun wieder, wenn man die Hypothenuse AB ziehet

het $AB^2 = AC^2 + CB^2$; so ist, wenn man statt AC^2 das ihm gleiche BC^2 setzet, $AB^2 = BC^2 + BC^2$, oder $= 2BC^2$. Man setze nun wieder AD auf AB unter einen rechten Winkel, und mache $AD = BC$, so ist $AD^2 = BC^2$; und nachdem DB gezogen worden, $DB^2 = AD^2 + AB^2$; oder $DB^2 = BC^2 + AB^2$. Es war aber vermöge des vorhergehenden $AB^2 = 2BC^2$. Folglich $DB^2 = BC^2 + 2BC^2$; oder $= 3BC^2$ u. s. w.

Damit man nicht immer nöthig habe, rechte Winkel zu zeichnen; so verfahre man bey Verdoppelung der Quadrate, oder, wenn man mehrere in eins verwandeln will, also: Man ziehe einen rechten Winkel A (Fig. 59.). Einen Schenkel desselben, z. E. hier AM mache man von unbestimmter Länge. Nun sey die Linie ab als die Seite von einem Quadrate gegeben, und man sucht die Seite eines andern Quadrats, welches viermal größer, als ab^2. Man trage die Seite ab aus der Spitze A des rechten Winkels in B, und auch auf den andern Schenkel in C, und ziehe CB; so ist $CB^2 = AB^2 + AC^2$; oder weil $AB = AC$; $CB^2 = 2AB^2$. Man fasse die Hypothenuse CB mit dem Cirkel, und trage sie aus A auf den Schenkel AM so, daß also $CB = AD$. Darauf ziehe man wieder die Hypothenuse DB; so hat man $DB^2 = DA^2 + AB^2$; und weil $CB = AD$; $DB = CB^2 + AB^2$. Es war aber $CB^2 = 2AB^2$; fol-

folglich ist $DB^2 = 2AB^2 + AB^2 = 3AB^2$. Auf diese Art fährt man immer fort. Man trage jezt DB aus A in E, und ziehe EB; so wird nunmehr $EB^2 = EA^2 + AB^2$, und weil $DB = EA$ gemacht ist, $EB^2 = DB^2 + AB^2$. Es war nun nach dem vorhergehenden $DB^2 = 3AB^2$. Also $EB^2 = 3AB^2 + AB^2 = 4AB^2$, und solchergestalt kann man immer weiter fortfahren, wenn es nöthig ist.

§. 105. Zus. Da (Fig. 60.) $BC^2 = CA^2 + BA^2$ so wird, wenn man beiderseits CA^2 abziehet, $BC^2 - CA^2 = BA^2$. Das ist, wenn man von dem Quadrate der Hypothenuse das Quadrat eines der Katheten abzieht; so bleibt das Quadrat des andern übrig; daß also die Differenz des Quadrats der Hypothenuse, und des Quadrats eines Katheti ist. Hieraus ergiebt sich gleich, wie man ein Quadrat finden könne, dessen Inhalt der Unterschied zweyer anderer gegebener Quadrate sey. Es sey die Seite ab und ac von zweyen Quadraten gegeben, so mache man einen rechten Winkel A; auf den einen Schenkel desselben trage man ab aus A in B, der andere Schenkel sey aber von unbestimmter Länge. Man fasse bc mit dem Cirkel, und durchschneide AM mit Eröffnung aus B, daß also $BC = bc$; so ist $AC^2 = BC^2 - AB^2$.

§. 106. Lehrs. Wenn in einem rechtwinkelichten

Drey-

Dreyecke ABC zwo Seiten AC, AB den zwoen Seiten ac, ab, eines andern rechtwinkelichten Dreyecks abc gleich; so sind diese Dreyecke einander gleich, und decken einander (Fig. 61.).

Bew. Da AC = ac, und AB = ab vermöge der Annahme ist, so sind auch die Quadrate dieser Linien gleich, oder $AC^2 = ac^2$, und $AB^2 = ab^2$. Es ist nun ferner $AB^2 = AC^2 + CB^2$ (§. 101.), oder $ab^2 = ac^2 + CB^2$. Auch im Dreyecke acb ist $ab^2 = ac^2 + cb^2$. Da also zwo Größen einer dritten gleich sind, so ist $ac^2 + CB^2 = ac^2 + cb^2$; und wenn man beiderseits ac^2 subtrahirt, $CB^2 = cb^2$, und also auch CB = cb. Derohalben sind in beiden Dreyecken die drey Seiten des einen gleich den drey Seiten des andern; und die Dreyecke sind selbst gleich, und decken einander (§. 47.).

II. Abschnitt.

Von dem Kreise.

§. 107. Lehrs. Kreise, deren Halbmesser gleich sind, sind selbst einander gleich; und wenn man die Durchmesser dieser gleichen Kreise ziehet, so werden auch die Halbkreise einander gleich. Ingleichen werden die Ausschnitte gleich, deren Winkel an dem

Mit=

Mittelpunkte einerley Größe haben, und endlich werden die Umkreise, oder die Bogen, welche diese gleichen Zirkel, oder gleiche Ausschnitte und Abschnitte begränzen, einander gleich. Sind aber die Winkel der Ausschnitte, welche mit einerley Halbmessern beschrieben worden, ungleich; so sind auch die Bogen derselben, und die Ausschnitte selbst ungleich.

Bew. Denn, wenn der Mittelpunkt eines von zweenen gleichen Kreisen auf den Mittelpunkt des andern gelegt wird, so decken die Kreise einander, man mag sie um diese Mittelpunkte drehen, wie man will; und wenn man sie so lange umdrehet, bis einige von den in ihnen gezogenen Halbmessern einander decken, so wird alles von selbst klar, was im Satze behauptet worden ist.

§. 108. Lehrs. Wenn in einem Kreise Sehnen gezogen werden, die einander gleich sind; so sind auch die Bogen, welche diese Sehnen abschneiden, von gleicher Größe. Sind aber in einem Kreise die Bogen gleich, und man ziehet dieser Bogen ihre Sehnen; so sind umgekehrt die Sehnen gleich.

Bew Da also die Sehnen im ersten Falle gleich sind; so ist (Fig. 62.) AB = DE. Wenn man nun nach dem Mittelpunkt C die geraden Linien AC, CB, CD, DE ziehet; so ist AC = CE; DC = CB

E (§.19.)

(§. 19.) Folglich das Dreyeck ACB = DCE (§. 47.), und der Winkel o = x; auch das Maaß dieser gleichen Winkel ist gleich (§. 24.); das ist, der Bogen AB ist = dem Bogen DE (§. 23.). 2. Da im andern Falle angenommen wird, der Bogen AB sey = dem Bogen DE, und diese das Maaß der Winkel o und x sind; so ist o = x. Noch über das ist AC = CE; CB = CD (§. 19.). Derohalben das Dreyeck ACB = DCE (§. 43.), und die Seite AB = DE (§. cit.), welches die Sehnen hier im Kreise sind.

§. 109. Lehrs. Wenn man aus dem Mittelpunkte C eines Kreises auf eine Sehne desselben AB eine senkrechte Linie CF ziehet, so wird die Sehne dadurch halbirt; und umgekehrt, eine Linie CF, welche die Sehne AB halbirte, und durch den Mittelpunkt gehet, stehet auf der Sehne AB senkrecht; und wenn man diese senkrechte Linie bis in E verlängert; so theilet sie ebenfalls den Bogen AEB in zween gleiche Theile (Fig. 63.)

Bew. I. Man ziehe die Halbmesser AC, CB. So ist AC = CB, CF = CF. Da nun FC auf AB senkrecht stehet, so sind bey F rechte Winkel, und daher AFC und FCB rechtwinkelichte Dreyecke; welche also einander gleich sind (§. 106.). Daher auch AF = FB ist (§. cit.).

II.

II. Da hier die Sehne halbirt ist; so hat man AF = FB, FC = FC, und AC = CB. Folglich ist das Dreyeck AFC wieder = FCB, und der Winkel AFC = dem Winkel BFC. Da diese Nebenwinkel aber gleich sind, so stehet FC auf AB senkrecht.

III. Aus der Nr. II. erwiesenen Gleichheit der Dreyecke AFC und FCB folgt auch, daß der Winkel ACE = ECB (§. 47.): und da gleicher Winkel ihr Maaß auch gleich ist; so ist der Bogen AE = dem Bogen EB (§. 24.).

§. 110. Zus. Es wird also ein gegebener Cirkelbogen ADB halbirt, wenn man die Sehne desselben AB durch eine senkrechte Linie CD in zween gleiche Theile theilt. Denn diese verlängerte Linie CD halbirt auch den Bogen in D.

§. 111. Lehrs. Wenn in einem Kreise (Fig. 63.) eine senkrechte Linie FD auf eine Sehne AB gezogen, und selbige dadurch halbirt wird; so theilet die senkrechte Linie, wenn man sie bis in E verlängert, den Kreis in zween gleiche Theile, und ist der Diameter.

Bew. Man ziehe AD und DB; so ist AF = FB, wie angenommen worden; FD = FD; und

der Winkel AFD = BFD; weil beide rechte sind. Deswegen ist das Dreyeck AFD = BFD (§. 43.), und AD = BD; und also ist auch der Bogen AD = dem Bogen DB (§. 108.). Da nun ferner, wenn aus C die Halbmesser AC, CB gezogen werden, der Bogen AE = EB ist (§. 109.), so hat man, wenn gleiches zu gleichem addirt wird, EA + AD = EB + BD; oder EAD = EBD. Sollte nun ED nicht durch den Mittelpunkt gehen, und also kein Diameter seyn (§. 18.); so ziehe man eine andere Linie aus C durch D auf die Sehne AB, welche der Diameter wäre; dadurch aber würde die Sehne AB noch in einem andern Punkte halbirt (§. 109.), welches nicht seyn kann (§. 42.).

§. 112. Zus. Will man in einem Cirkel den Mittelpunkt finden; so ziehe man eine Sehne AB (Fig. 63.) nach Willkühr, und theile sie durch eine senkrechte Linie ED in zween gleiche Theile; so ist ED der Diameter. Halbirt man nun auch diese ED in dem Punkt C, so ist der Mittelpunkt des Cirkels gefunden.

§. 113. Auf. Durch drey gegebene Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, den Umkreis eines Cirkels zu beschreiben.

Aufl. Es seyen die drey gegebenen Punkte A,

B, C (Fig. 65.). Man ziehe darauf AB und BC; nachdem man eine jede dieser Linien in D und E halbirt hat, richte man die senkrechte Linien DF und EF auf, welche man verlängert, bis sie sich in F durchschneiden. Man beschreibe hierauf den Umkreis um den Mittelpunkt F, mit dem Halbmesser FA.

Bew. Wenn man AF, BF, CF ziehet; so werden wegen der rechten Winkel bey D und E, und weil AD = DB, und DF = DF, die Dreyecke ADF DFB gleich seyn. (§. 43.), und also auch die Seite AF = BF. Aus dem nämlichen Grunde ist die Seite FC des Dreyecks FEC der Seite BF des Dreyecks FEB gleich. Da also FC = FB = AF; so kann man sie als Halbmesser eines Kreises ansehen (§. 19.), und folglich wird der Cirkelbogen, welcher um den Mittelpunkt F durch A beschrieben wird, auch durch die Punkte B und C gehen.

§. 114. Zus. Drey Punkte bestimmen einen einzigen Kreis, wie zween eine gerade Linie (§. 34.). Doch wird der Kreis zugleich der Größe nach bestimmet; die gerade Linie zuweilen nur der Länge nach (§. cit.).

§. 115. Zus. Man wird also auch zu einem jeden gegebenen Theile vom Umkreise eines Cirkels den

Mittelpunkt desselben finden, wenn man zu dreyen in diesem Theile des Umkreises nach Willkühr angenommenen Punkten, den Mittelpunkt sucht.

§. 116. Erkl. Der Winkel an dem Mittelpunkte eines Kreises (angulus ad centrum) ist derjenige, dessen Spitze an den Mittelpunkt, und dessen beide Schenkel an die Peripherie des Cirkels stossen; wie z. E. x (Fig. 66.) Hingegen der Winkel der Peripherie (angulus ad peripheriam) ist derjenige, dessen Spitze sowohl als die beiden Schenkel an die Peripherie stossen, wie der Winkel ADB oder m (Fig. 66.).

§. 117. Zus. Da der Bogen AB aus dem Mittelpunkt C beschrieben worden; so ist dieser Bogen das Maaß des Winkels ACB oder x; der am Mittelpunkt stehet.

§. 118. Lehrs. In einerley Kreise ist der Winkel bey dem Mittelpunkt zweymal so groß, als ein Winkel bey dem Umkreise, welcher auf eben dem Bogen steht.

Bew. Es kommen hier drey Fälle vor. Entweder fällt der Mittelpunkt des Cirkels in einen Schenkel des Winkels am Umkreise, oder innerhalb dieses Winkels, oder ausserhalb desselben.

Es

Es falle 1.) der Mittelpunkt C zuerst in den Schenkel BD des Winkels am Umkreise (Fig. 66.) ADB; es stehet dieser Winkel auf dem nämlichen Bogen AB, auf welchem der Winkel ACB am Mittelpunkt stehet. Nun ist x der äußere Winkel, der den beiden innern entgegengesetzten gleich ist (§. 92.), nämlich x = m + n. Weil ferner CD und CA Halbmesser sind, so ist CD = CA (§. 19.), und also das Dreyeck ACD gleichschenkelicht. Folglich sind die Winkel an der Grundlinie gleich m = n (§. 87.). Es ist derowegen x = m + m = 2 m.

Es falle 2.) der Mittelpunkt C innerhalb des Winkels am Umkreise ADB; der Winkel am Mittelpunkte ist ACB, und beide stehen auf dem Bogen AB. Es ist aber, wie schon im ersten Falle bewiesen worden, x = 2 m, und y = 2 n. Folglich x + y = 2 m + 2 n; oder x + y = 2 (m + n). Da nun x + y = ACB und m + n = ADB; so wird ACB = 2 ADB.

Es falle endlich 3.) der Mittelpunkt C außerhalb des Winkels bey dem Umkreise ADB (Fig. 68.). Der Winkel am Mittelpunkt, der mit dem Peripheriewinkel auf einerley Bogen AB stehet, ist hier ACB. Man ziehe nun noch die Linie CD durch die Punkte D und C, und verlängere diese Linie bis in E. Hier ist ECB = 2 EDB, wie Nr. 1. erwie-

sen worden ist. Oder, da ECB aus den Winkeln x und y bestehet, und EDB aus m und n, so ist $x + y = 2m + 2n$. Nun ist wieder nach Nr. 1. der Winkel $x = 2m$, und wenn dieses von erstern Winkeln abgezogen wird, bleibt $y = 2.n$.

§. 119. Zus. Der Winkel bey dem Umkreise hat allemal zu seinem Maaß den halben Bogen, worauf er stehet. Denn in jedem Falle ist der Bogen AB das Maaß des Winkels beym Mittelpunkt (§. 23.). Da aber der Peripheriewinkel nur die Hälfte vom Winkel beym Mittelpunkt ist (§. 118.); so muß auch sein Maaß nur halb so groß seyn, als des Winkels beym Mittelpunkt.

§. 120. Zus. Alle Winkel am Umkreise, die auf eben denselben, oder gleichem Bogen stehen, sind einander gleich (Fig. 69.). Denn da alle diese Winkel C, D, E, F zu ihrem Maaß den halben Bogen AB haben, worauf sie stehen, so ist dieser Winkel ihr Maaß gleich, und folglich die Winkel selbst einander gleich.

§. 121. Zus. Alle Winkel am Umkreise, welche auf dem Diameter, das ist auf dem halben Cirkel stehen, sind rechte Winkel, und ein jeder hält also 90°. Dann wenn AB (Fig. 70.) der Durchmesser ist; so theilet er den Kreis in zween gleiche Thei-

le

le (§. 111.). Die Winkel E, F, G stehen also alle auf dem Halbkreise ADB; da es aber Winkel am Umkreise sind; so hat jeder zu seinem Maaß den halben Cirkel ADB, oder $\frac{1}{2}$ 180° = 90°, und sind folglich rechte Winkel.

§. 122. Zus. Ein Winkel am Umkreise ADB (Fig. 71.), welcher auf einem kleinern Bogen AB als ein halber Zirkel stehet, ist ein spitziger Winkel; und gegentheils der Winkel an der Peripherie EGF, welcher auf einem größern Bogen EABF als ein halber Cirkel stehet, ist ein stumpfer.

§. 123. Zus. Jedes in einem Kreise beschriebene Viereck (Fig. 72.) ABCD hat die Eigenschaft, daß seine gegenüberstehenden Winkel zusammen 180° oder 2 Rechte betragen. Denn A stehet auf dem Bogen BCD, und C auf dem Bogrn BAD. Da nun beide zusammen auf Bogen stehen, die den Umkreis ausmachen; so machen ihre Maaße zusammen den halben Umkreis (§. 118.) oder 180°. Eben so erhellet, daß B + D = 180°. Also ist auch im Vierecke A + C = B + D.

§. 124. Aufg. An den Endpunkt einer gegebenen geraden Linie AB eine senkrechte Linie zu setzen (Fig. 73.).

Aufl. Aus einem nach Willkühr angenommenen Punkt C beschreibe man durch den Endpunkt A einen Kreis, welcher die gegebene Linie A B in D schneide. Man ziehe D C, und verlängere dieselbe, daß D C = C E werde. Hierauf ziehe man E A, welche auf der geraden Linie A B senkrecht stehen wird.

Bew. Da C D = E C ist, und beide eine gerade Linie ausmachen, so ist E D der Durchmesser. Also ist E A D ein Winkel, der auf einem halben Cirkel stehet; folglich ein rechter (§. 121.), und E A ist senkrecht auf A B (§. 15.).

§. 125. Anm. Man hat besondere Instrumente, womit man am Ende einer geraden Linie Perpendikel aufrichten kann; die man *Winkelhacken* nennt. Das rechtwinkelichte Dreyeck (§. 75.) dienet aber auch dazu. Man kann sowohl dieses als jenen nach dem §. 121. probiren, ob es richtig sey, wenn man nämlich einen halben Cirkel beschreibt, und an die Endpunkte des Diameters aus einem Punkte der Peripherie gerade Linien ziehet; und darauf die Spitze des Winkelhackens an die Spitze des gemachten Winkels legt. Decken nun die Seiten des Winkelhackens die Schenkel des Winkels, so ist der Winkelhacken richtig.

§. 126. Erkl. Eine geradlinichte Figur wird in einem Cirkel beschrieben, wenn eine jede Ecke der Figur in der Peripherie des Cirkels sich endiget. Und eine geradelinichte Figur wird um einen Cirkel beschrieben, wenn eine jede Seite der geradelinichten Figur die Peripherie des Cirkels berühret.

§. 127. Anmerk. Wird die Peripherie eines Kreises in gleiche Theile getheilet, und ziehet man die Sehnen dieser gleichen Bogen, AB, BC, CD, DE, EA (Fig. 74.); so entstehet eine ordentliche Figur, welche so viele Seiten, als die Peripherie Theile hat. Denn da die Bogen gleich sind; so sind auch die darunter gezogenen Sehnen gleich. Daß aber auch die Winkel A, B, C, D, E gleich sind, zeigt sich daraus, weil sie alle Winkel am Umkreise sind, welche auf gleichen Bogen stehen. Die Figur wäre derohalben regulär, oder ordentlich (§. 30.)

Es käme also alles darauf an, daß man den Umkreis in jede Anzahl von gleichen Theilen geometrisch eintheilen könnte. Es lehren aber die Anfangsgründe der Geometrie keine allgemeine Methode, wie diese Theilung zu bewerkstelligen sey; weil dergleichen Theilung mit den Instrumenten allein, deren man sich in den Anfangsgründen bedient, nämlich mit dem Cirkel und Lineal nicht verrichtet werden kann. Die Theilung des Umkreises in eine verlangte Anzahl

zahl Theile wird derowegen hier durch Probiren am leichtesten zu Stande gebracht. Noch eine andere mechanische Art, die Peripherie zu theilen, wird gleich hernach erklärt werden. Wenn man also bloß auf den Gebrauch siehet; so kann man behaupten, daß die Beschreibung aller ordentlichen Figuren in unserer Gewalt sey; weil man den Umkreis durch öfters Versuchen in eine verlangte Anzahl gleicher Theile theilen kann.

§. 128. Lehrs. Ein reguläres Polygon ABCDEA (Fig. 75.), das in einen Kreis beschrieben ist; wird durch die Halbmesser AF, FB, FC, FD, FE in lauter gleiche Dreyecke AFB, BFC u. s. w. getheilt; und die Polygonwinkel A, B, C, D, E werden durch diese Halbmesser halbirt.

Bew. Da das Polygon regulär ist; so ist AB = CD, und da auch noch AF = FC, FB = FB, so sind die Dreyecke AFB, FBC einander gleich (§. 47.), und es ist o = x (§. cit.); also der Polygonwinkel ABC ist dadurch in zween gleiche Theile getheilt. Auf diese Art zeigt sich die Gleichheit aller übrigen Dreyecke.

§. 129. Zus. Das Dreyeck AFB ist gleichschenkelicht; und die Winkel an der Grundlinie gleich, nämlich o = y (§. 87.). Da aber auch y = x

(§. 128.),

(§. 128.), und o + x = A B C; oder = dem Polygonwinkel, so ist auch y + o = A B C oder = dem Polygonwinkel. Da sich nun der Polygonwinkel in jedem Vielecke finden läßt; so kann man auch den Winkel am Mittelpunkt (angulus centri) finden; nämlich man ziehet y + o oder den Polygonwinkel von 180° ab; so bleibt AFB, oder der Winkel am Mittelpunkt übrig. Kürzer findet man aber den Winkel am Mittelpunkt in einem Polygon so: Man dividirt 360° durch die Anzahl der Seiten; der Quotient ist der verlangte Mittelpunktswinkel. Denn aus der (§. 128.) erwiesenen Gleichheit der Dreyecke AFB, FBC u. s. w. folgt auch, daß die Winkel, die am Mittelpunkt herum liegen, gleich sind. Da nun ihr Maaß zusammen 360° beträgt, und gleicher Bogen ihre Sehnen gleich sind; so darf man nur mit der Anzahl dividiren; so hat man die Größe eines solchen Winkels.

Exempel. Im Fünfecke ist der Polygonwinkel 108° gefunden worden (§. 93.). Dieser von 180° abgezogen, läßt 72° für den Winkel am Mittelpunkt. Dividirt man 360° durch 5; so bekömmt man ebenfalls 72°. Wird die Anzahl der Seiten im Vieleck n genannt; so findet man den Mittelpunktswinkel $\frac{360°}{n}$. Wo nach und nach n = 5 = 6 = 7. u. s. w. genommen wird.

§. 130.

§. 130. Zus. Vermittelst des vorhergehenden Zusatzes kann jedes verlangte Polygon auf folgende Art mechanisch beschrieben werden: Man suche den Mittelpunktswinkel; beschreibe einen Kreis, und ziehe den Halbmesser FB (Fig. 75.); an den Mittelpunkt F setze man den gefundenen Mittelspunktswinkel des verlangten Vielecks, und ziehe einen andern Halbmesser AF. Die Seite AB, die sich zwischen den Endpunkten der Halbmesser ziehen läßt, kann so vielmal in dem Cirkel herumgetragen werden, als das verlangte Vieleck Seiten haben soll.

§. 131. Lehrs. In einem regulären Sechsecke ist die Seite des Sechsecks AB (Fig. 76.) dem Halbmesser des Kreises BC gleich.

Bew. In dem Sechseck ist der Winkel am Mittelpunkt ABC $= \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$ (§. 129.). Die zweeen übrigen Winkel A und B im Dreyecke ACB betragen also $180^\circ - 60^\circ$ oder 120°. Da aber AC $=$ CB, so sind die Winkel an der Grundlinie einander gleich, das ist $A = B$. Folglich ist die Größe eines dieser Winkel $\frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$. Da nun jeder Winkel im Dreyecke ACB 60° beträgt; so ist ACB gleichseitig (§. 91.), und CB oder AC $=$ AB.

§. 132. Zus. Daher läßt sich in einem gegebenen Kreise leicht ein Sechseck geometrisch beschreiben. Man darf nur den Halbmesser desselben in der Peripherie herumtragen, und die Sehnen der Bogen ziehen. Sonst findet man aus einem gegebenen Polygone, das, welches noch einmal, und das, welches halb so viel Seiten hat. Im ersten Falle müßte man den Bogen halbiren, und im andern den Bogen verdoppeln. Das Fünfeck und Zehneck kann ebenfalls geometrisch beschrieben werden. Es läßt sich aber hier nicht zeigen. Ptolomäus in seinem Almagest hat schon diese Verzeichnung gelehret. Man findet sie auch in Libr. XIII. prop. X. in schol. der Ausgabe des Euklides, die zu London durch Js. Barrow besorgt worden. Man sehe auch Wolfii Element. Analyſ. finitor. probl. 116. und andere Analysten.

§. 133. Aufg. Ueber einer jeden gegebenen Linie AB ein ordentliches Vieleck zu beschreiben (§. 77.).

Aufl. Man suche den Polygonwinkel des verlangten Vielecks; und die Hälfte desselben trage man an A und B; und ziehe Linien AC, BC, bis sie sich durchschneiden. Aus der Spitze C beschreibe man einen Kreis; so kann man die Sehne AB darin herumtragen, und wird das verlangte Vieleck beschrieben werden.

Bew.

Bew. Es sey AB die Seite eines Fünfecks; so ist A + B = dem Polygonwinkel = 108° (§. 129.). Also ist C = 72° (§. cit.). Folglich ist dieser Winkel oder der Bogen AB der fünfte Theil der Peripherie, und seine Sehne wird sich fünfmal im beschriebenen Cirkel herumtragen lassen. Daß aber der Kreis durch A und B auch gehen werde, ist daher offenbar, weil A = B genommen worden; da dann allerdings AC = CB seyn muß (§. 90.), und daher die Punkte A und B in die Halbmesser zu liegen kommen.

§. 134. Anm. Weil man mit dem gewöhnlichen Transporteur an A und B die Winkel ansetzen muß; so giebt dieses bey großen Kreisen und vielseitigen Vielecken beträchtliche Fehler; ob gleich das Verfahren nach der Theorie vollkommen richtig ist. Die Trigonometrie giebt Vorschriften, die eine richtigere Ausübung geben; dazu bahnen aber die bisherigen Betrachtungen den Weg.

§. 135. Zus. Wenn AB (Fig. 77.) die Seite eines Sechseckes seyn soll; so darf man nur mit dieser Seite ein gleichseitiges Dreyeck beschreiben; alsdann wird sich in dem Kreise, der mit dem Halbmesser BC beschrieben worden, die Seite AB sechsmal darinn herum tragen lassen.

III. Abschnitt.

Von Ausmessung der geraden Linien und Figuren.

§. 136. Willkühri. Satz. Um die geraden Linien auszumessen, nehme man ein Maaß an, das man einen Fuß nennet. Zehen Schuh oder Fuß machen eine Ruthe. Man theile den Fuß wieder in zehn gleiche Theile; so ist der zehente Theil eines Fußes ein Zoll; und wenn man den Zoll wieder in zehn gleiche Theile theilet; so beträgt der zehente Theil eines Zolls eine Linie. Kleinere Eintheilungen kommen selten vor; und es ist daher nicht nöthig, daß man besondere Namen für sie macht. Man kann sie allenfalls durch ihr Verhältniß zu den angezeigten bestimmen. Die Zeichen der Ruthen, Schuhe, Zolle, Linien, seyen mit den Zeichen der Grade, Minuten, Secunden rc. (§. 21.) einerley. Z. E. $85^\circ\ 3'\ 4''\ 7'''$ würde heißen: 85 Ruthen, 3 Schuh, 4 Zoll, 7 Linien. Es zeigt sich hieraus gleich, daß man die Maaße bequem in einander verwandeln könne; z. E. $74^\circ\ 8'\ 5''\ 3'''$ wäre $= 74853'''$. Eben so wäre $500''' = 5'$; und $9^\circ = 9000'''$.

§. 137. Anm. Diese Eintheilung des Maaßes nennet man auch das geometrische Maaß; und ihre

große Bequemlichkeit wird sich in der Folge noch mehr zeigen. Strewins ein geschickter holländischer Mathematikverständiger hat die Geometern und Feldmesser zuerst veranlaßt, diese Decimaltheilung zu gebrauchen. Sonst wird von Werkleuten der Schuh in 12 Zoll getheilt, und so machen an manchen Orten 12, auch wohl 15, 16 Schuh eine Ruthe; z. E. die rheinländische Ruthe hält 12′, die baierische 16′ u. s. w. Man muß also wissen, die Maaße, die an verschiedenen Orten gebräuchlich sind, in einander zu verwandeln. Insgemein hat man an jedem Orte zuerst den Fuß bestimmt, und aus diesem hernach die Ruthe und den Zoll.

§. 138. Anm. Vor andern hat man nöthig den französischen oder pariser Fuß (pied du Roy), den rheinländischen und den londoner oder englischen sich bekannt zu machen. Der erste und letzte kommen oft in mathematischen Rechnungen vor; und der rheinländische gilt nicht allein in Deutschland, sondern auch in Dännemark, wo er überall eingeführt ist. Es wird aber der pariser Schuh in 12″, und jeder Zoll in 12‴, und noch jede Linie in 10 Theile getheilet; daß also der Fuß 1440 solche Theile enthält. Man hat nun gefunden, daß, wenn der pariser 1440 gleiche Theile enthält, der rheinländische 1391, und der londoner 1350 enthalte. Der pariser ist also größer, als jeder der andern. In Wolfs Elem. geo-

metr.

metr., den gewöhnlichen astronomischen Kalendern, und andern dergleichen Büchern findet man das Verhältniß noch vieler anderer Maaße zum pariser Schuh.

§. 139. Aufg. Ein gegebenes zehntheiliges Maaß in zwölftheiliges verwandeln, und umgekehrt.

Aufl. Man nenne das Decimalmaaß x, das Zwölftheilige y, und es sey von einer Länge 10 x und 12 y, oder $10\,x = 12\,y$, so ist, wenn beiderseits mit 10 dividirt wird $x = \frac{12}{10}\,y$; und wenn man wirklich nach den Grundsätzen der Decimalrechnung (§. 92. Arithm.) dividirt, $x = 1,2 \ldots y$.

Suchte man y, so wäre wieder $10\,x = 12\,y$, und beiderseits mit 12 dividirt $\frac{10}{12}\,x = y$, oder $\frac{5}{6}\,x = y$. Es ist aber, wenn man wirklich wieder dividirt $\frac{5}{6}\,x = 5,833 \ldots x$.

Sollte man also sagen, wieviel 7 Duodecimalzoll in Decimalzollen betragen, so ist $\frac{5}{6} \times 7\,x = 7\,y$, das ist $\frac{35}{6}\,x = 7\,y$; und wenn man wirklich dividirt $5,833 \ldots x = 7\,y$.

§. 140. Aufg. Eine gegebene Menge von Schuhen einer Art in eine andere zu verwandeln; z. E. es wird gefragt, wie viel betragen 6 pariser Schuhe im Rheinländischen?

Aufl. Wenn man den rheinländischen Schuh r und die Menge der gesuchten rheinländischen x, den pariser p nennet; so wäre $6p = xr$ und folglich $\frac{6p}{r} = x$. Nennet man allgemein die Menge der gegebenen pariser Schuhe np; so würde $np = xr$, und $x = \frac{np}{r}$, wo dann n jede Anzahl von pariser Schuhen bedeutet.

Solche Formeln lassen sich aber bequem durch die Logarithmen berechnen. Es wäre demnach $\log x = \log \frac{p}{r} + \log n$; und $\log \frac{p}{r} = \log p - \log r$ Also $\log x = \log p - \log r + \log n$

$$
\begin{aligned}
\text{Es ist aber } \log p &= \log 1440 = 3.1583625 \\
\log r &= \log 1391 = 3.1433271 \\
\log p - \log r &= 0.0150354 \\
\text{Wenn nun } n = 6 \text{ ist}, \log 6 &= 0.7781513 \\
\text{so ist } \log p - \log r + \log 6 &= 0.7931867
\end{aligned}
$$

Man schlage diesen Logarithmen unter der Charakteristik 3 auf, so findet man, daß ihm die Zahl 6211 am nächsten komme. Da aber der Logarithmus die Charakteristik 0 hat, und der in den Tafeln gefundene 3; so ist die dazu gehörige Zahl tausendmal größer (S. Algebr.). Man dividire daher die gefundene Zahl durch 1000, so wird sie 6,211.

Dieses

Dieses soll nur dazu dienen, um das Verfahren bey dergleichen Rechnungen zu zeigen, und einen Begriff davon zu geben. Deswegen habe ich die gewöhnlichen logarithmischen Tafeln, die nicht über 10000 gehen, gebraucht, und das Verhältniß des pariser zum rheinländischen Schuh 1440 zu 1391 genommen. Man hat aber dieses letztere Verhältniß noch genauer bestimmet. Z. E. Kästner in der Geometrie setzt es wie 14400 zu 13913, und daraus findet er nach angestellter Berechnung, daß 6 pariser Schuhe gleich sind, 6,2050 rheinländischen; daß also nach unsrer Rechnung um 0,06 eines Schuhes gefehlt wäre. Wer das Verhältniß 14400 zu 13613 gebrauchen will, muß größere logarithmische Tafeln haben, oder die Methode wissen, wie man aus einem Logarithme, den man in den Tabellen findet, einen von einer größern Zahl, die man nicht in den Tabellen findet, machen kann; das unten die Trigonometrie lehren wird.

Man nimmt insgemein an, daß 6 pariser Schuh oder eine Toise 6 rheinländischen, oder 12 pariser Schuh; das ist 2 Toisen 12 rheinländischen Schuhen, das ist einer Ruthe gleich wären. Aber eben an gedachtem Orte zeigt Hr. Hofr. Kästner, daß diese Annahme bey großen Rechnungen merkliche Fehler hervorbringe. Denn da oben gefunden worden, daß 6 pariser Schuhe oder eine Toise um $\frac{205}{1000}$ eines rheinländischen Schuhes größer sind, als 6 rheinländische

dische, oder eine rheinländische halbe Ruthe; so findet man nach angestellter Berechnung, daß 180 Toisen mehr, als viertehalb Ruthen größer sind, als 90 rheinländische Ruthen. *Sturm* im veritable Vauban setzt da, wo die französischen Ingenieurs 180° für eine Seite eines Polygons annehmen, 90° rheinländisch dafür. Er macht folglich diese Seite mehr als 3 Ruthen zu kurz.

§. 141. Zus. Oft muß man Maaße mit einander vergleichen, deren Verhältniß nicht unmittelbar, sondern durch andere mittelbar gegeben ist. Und da kann die Kettenregel mit gutem Erfolge angebracht werden. Z. E. man verlangt die Verhältniß des zellischen Schuhes zum baierischen. Wenn z der zellische, r der rheinländische, p der pariser, b der bairische bedeutet;

so ist $z : r = 48 : 51$ (com. fac. R. sc. Gött. T. II.

$r : p = 1391 : 1440$

$p : b = 1440 : 1280$ (Ephemer. Vindob.)

$z : b = 48 \times 1391 \times 1440 : 51 \times 1440 \times 1280$

$= 48 \times 1391 : 51 \times 1280$

das ist, wenn man beiderseits mit 16 dividirt,

$= 3 \times 1391 : 51 \times 80$

und noch einmal mit 3

$= 1391 : 17 \times 80$

$= 1391 : 1360$

Auch

Auch hier ließen sich die Logarithmen anbringen, die in manchen Fällen das Gesuchte genauer gäben.

Aus Krausens Contoristen ist das Verhältniß des londoner Schuhes zum rheinländischen wie 13516 zu 13913. Daraus kann man nach obiger Vorschrift das Verhältniß des londoner zum baierischen Schuh bestimmen.

§. 142. Anm. Um gerade Linien einsweilen auszumessen, nehme man eine Linie AB (fig. 78.) zum Maaßstabe ab, und lasse selbige eine Ruthe gelten. Man theile sie in 10 gleiche Theile; so wird ein Theil AC ein Schuh seyn. Ist nun die Linie so groß, daß man noch ferner einen Theil AC in 10 gleiche Theile theilen kann; so wäre ein solcher Theil ein Zoll. Man hat aber einen weit bequemern Maaßstab, der erst nachher kann erklärt werden.

§. 143. Erkl. Der Innhalt einer Figur wird gefunden (area figurae) wenn man eine kleinere Fläche in ihr so oft herumlegt, als sie sich herumlegen läßt. Die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die kleinere Fläche in der größern herumgelegt werden kann, bestimmet den Innhalt der Größern. Man wählet zu dieser Absicht ein Quadrat; weil sich dadurch die Ausmessung der Figuren am leichtesten bewerkstelligen läßt.

§. 144. Aufg. Den Innhalt eines Quadrats auszumessen.

Aufl. Man messe die Seite AB (fig. 79.) auf dem Maaßstabe. Die Zahl der gefundenen Ruthen, Schuhe, Zolle rc. multiplicire man durch sich selbst; so hat man den Innhalt.

Ex. Es sey AB = 354''

354
1416
1770
1062
Innhalt 125316''

Bew. Man setze, daß der Kürze wegen AB = 4' auf dem Maaßstabe gefunden worden; so lassen sich auf AB auch vier kleine Quadrate wie a c b d herum legen. Da nun im Quadrate AB = CA; so kann man solcher Lagen von kleinen Quadraten, deren jede vier enthält, auch viere übereinander legen, und das Produkt 4 × 4 zeigt also an, wie viel kleine Quadrate A b c d, das man zur Einheit angenommen hat; im Größern ABCD herumgelegt werden können.

§. 145.

§. 145. Zus. Eine Quadratruthe, das ist eine Fläche, deren jede Seite eine Ruthe lang ist, enthält 100 Quadratschuhe. Denn wenn man AB (fig. 79.) eine Ruthe seyn läßt, so enthält selbige nach der geometrischen Eintheilung 10 Schuhe; und der Innhalt von ABCD in Schuhen ausgedrückt, ist dervhalben 10 × 10 = 100′. Auf die nämliche Art zeigt sich, daß ein Quadratschuh 100 Quadratzoll, und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien enthält.

§. 146. Zus. Aus dem vorhergehenden wird nunmehr auch klar, wie eine gegebene Anzahl von kleinerm Flächenmaaße in ein größers verwandelt werden könne. Es sey aus §. 139. Der Innhalt einer Fläche 125316″; so dürfte man, um ein größers Maaß zu bekommen, nur zwo und zwo Ziffern von der Rechten gegen die Linke zu, abschneiden, und vor jede nächst vorhergehende 2 Ziffern allemal das nächst größere Maaß setzen. Das Beyspiel würde also so aussehen: 12°53′16″. Der Grund von dieser Operation ist folgender. Da alles Zolle sind, und ein Schuh 100 Zolle enthält, so bekömmt man Schuhe, wenn man mit hundert dividirt. Es wäre also im vorigen Exempel 1253′16″. Da aber auch wieder 100 Quadratschuhe auf eine solche Ruthe gehen, so dividire man, um die Ruthen zu bekommen, noch einmal mit 100. Es wäre dadurch 12°53′16″ wie oben.

Umgekehrt ist es eben so leicht, ein größers Quadrat- oder Flächenmaaß in ein kleiners zu verwandeln. Es ist z. E. wie man von selbst einsiehet $7^\circ = 700' = 70000'' = 7000000'''$. Man darf also nur immer zwey Nullen anhängen, um das nächst kleinere zu bekommen.

§. 147. Zus. Gebrauchte man zwölftheilichtes Maaß, wie das rheinländische ist; so hätte die Quadratruthe 144 Quadratschuhe; und der Quadratschuh auch so viele Quadratzolle, der Quadratzoll gleichfalls so viele Quadratlinien. Hier bringt man also ein größers Maas auf ein kleiners durch die Multiplication mit 144; und das kleinere auf das größere durch die Division mit 144. Dadurch zeigt sich wiederum die Bequemlichkeit des zehntheilichten Maaßes.

§. 148. Aufg. Den Innhalt eines Rechtecks zu finden.

Aufl. Man messe ein paar an einander liegende Seiten desselben auf dem Maaßstabe, wie hier z. E. in fig. 80. die Seite AB und AC. Die Zahlen, welche die Größe der Seiten desselben auf dem Maaßstabe, wie hier z. E. in fig. 80. die Seite AB und AC. Die Zahlen, welche die Größe der Seiten ausdrücken, multiplicire man mit einander; so ergiebt sich der Innhalt.

Ex.

Ex. Es sey AB = 3 2 2″
AC = 1 2 5

1 6 1 0
6 4 4
3 2 2

Innhalt 4° 0 2′ 5 0″

Bew. Es sey der Kürze wegen wieder AB = 5, AC = 3; so läßt sich das kleinere Quadrat Abcd auf AB fünfmal legen. Da nun AC = 3 ist, so können solcher Reihen von kleinen Quadraten, deren jede fünfe enthält, drey übereinander gesetzt werden. Es werden folglich in dem ganzen Rechteck 3 × 5, das ist 15 dergleichen kleine Quadrate seyn.

§. 149. Zus. Man sagt gemeiniglich, das Produkt aus der Höhe AC und der Grundlinie AB, sey der Innhalt des Rechtecks. Eine Linie aber, die mit einer Linie multiplicirt wird, kann keine Fläche geben, sondern wieder nur eine Linie. Man muß sich die Sache so vorstellen. Wenn man eine Linie Ab zur Einheit angenommen hat; so verhält sich Abcd : ABCD = Ab × cA : AB × CA. Das ist, die zwo Flächen, die man mit einerley Einheit ausgemessen hat, verhalten sich gegen einander, wie sich das Product von zwoen an einander liegenden Linien, die in den Flächen sind, gegen einander verhalten, wenn

sie

sie ebenfalls mit einerley Einheit ausgemessen worden sind.

§. 150. Zus. Die beiden Seiten des Rechtecks muß man mit einerley Maaße messen. Wäre z. E. AB = 7′ und AC = 54″; so muß man die erste auch in Zollen ausdrücken; um die Menge von Quadratzollen zu bekommen, welche den Innhalt gäbe. Im Decimalmaaß können aber 7′ leicht zu Zollen gemacht werden; da wäre 7′ = 70″, und also der Innhalt = 54″ × 70″ = 3780″ Quadratzolle. Im zwölftheilichten Maaße wären 7′ = 7 × 12″ (§. 138.) = 84″; und hernach 54″ = 5′ 4″. Es sind aber 5 = 5 × 12″ = 60″ dazu 4 addirt 64″. Also 64″ × 84″ gäbe den Innhalt.

§. 151. Aufg. den Innhalt eines Rhombus und eines Rhomboides zu finden (fig. 81.)

Aufl. Man messe die Grundlinie AB, und die Höhe CE, und multiplicire die gefundenen Zahlen mit einander, welche AB und CE ausdrücken; das Produkt giebt den Innhalt der Flächen. Es sey z. E. im Rhomboides AB = 258″, CE = 16′ = 160″

$$\begin{array}{r} 160 \\ \hline 1548 \\ 258 \\ \hline \end{array}$$

Innhalt 4° 12′ 80″

Bew.

Bew. Es ist schon gezeigt worden (§. 148.) auf welche Art ein Rechteck könne und müße ausgemessen werden. Nun lassen sich Rhombus und Rhomboides in Rechtecke verwandeln, deren Innhalt dem Innhalte ersterer gleich sind. Denn wenn man aus C und D die Perpendicularlinien CE, CF ziehet, so ist CDEF ein Rechteck. Dieses Rechteck hat aber mit dem Rhombus im ersten Falle, und Rhomboides im andern Falle allemal eine gleiche Grundlinie CD und gleiche Höhe CE, folglich ist dieses Rechteck, das CD zur Grundlinie und CE zur Höhe hat, dem Rhombus oder im zweyten Falle dem Rhomboides gleich am Innhalte (§. 98.). Man braucht also nur CD mit CE zu multipliciren; so bekömmt man die gesuchten Innhalte des Rhombus und Rhomboides (§. 148.).

§. 152. Zus. Eines jeden schiefen Parallelogramms Innhalt kann also gefunden werden.

§. 253. Aufg. Eines jeden Dreyecks ABC (fig. 82.) Innhalt zu finden.

Aufl. Man messe die Grundlinie BC, und die Höhe AD auf dem Maaßstabe; man multiplicire die gefundenen Größen mit einander, und dividire das Produkt durch 2.

Exemp.

Ex. Es sey BC = 132″
A = 54

528
660

2) 7128 | 3564″ = dem Innhalte des Dreyecks.

Man hätte auch gleich die halbe Grundlinie 66 mit der ganzen Höhe 54, oder die ganze Grundlinie 132 mit der halben Höhe 27 multipliciren können; so braucht man das Product nicht zu halbiren.

Bew. Wenn man BC mit AD multiplicirt, so bekommt man den Innhalt eines Rechtecks, das BC zur Grundlinie, und AD zur Höhe hat (§. 148.). Da nun ein Dreyeck die Hälfte von einem solchen Rechteck, das gleiche Grundlinien und Höhe mit ihm hat, ist (§. 100.); so muß man das Produkt durch 2 dividiren, um den Innhalt des Dreyecks zu bekommen. Es ist also dieser = $\frac{BC \times AD}{2} = \frac{BC}{2} \times AD \times BC \times \frac{AD}{2}$.

§. 154. Zus. Da sich jedes Vieleck, wie ABCDE (fig. 83.) durch Diagonale im Dreyecke zertheilen läßt; so kann man jedes Vielecks Innhalt finden, wenn man die Dreyecke einzeln ausrechnet, und hernach zusammen addirt.

Exemp.

Exemp. Es sey I. $\frac{1}{2}$ AC = 43′
BF = 35

215
129

Innhalt des Dreyecks A B C 1505′

II. $\frac{1}{2}$ AC = 43′
Dg = 45

215
172

Innhalt des Dreyecks ACD 1935

III. $\frac{1}{2}$ AD = 42′
Eh = 30

Innhalt des Dreyecks AED 1260

IV. Also die Dreyecke ABC = 1505
ACD = 1935
AED = 1260

Innhalt der Figur = 4700

Die Rechnung kann noch verkürzet werden, wenn man den Innhalt eines Trapeziums, wie ABCD auf

einmal

einmal sucht. Dieses kann aber geschehen, wenn man die Seite, welche zweyen Dreyecken gemein ist, z. E. AC für ihre gemeinschaftliche Grundlinie annimmt, und darauf die Höhen von den gegenüberstehenden Winkeln fallen läßt; wie Bf, Dg. Die Summe dieser Höhen Bf + Dg wird zusammen addirt, und mit der gemeinschaftlichen halben Grundlinie AC multiplicirt; oder die halbe Summe der Höhen wird mit der ganzen Grundlinie multiplicirt.

Ex. Es ist nach dem vorhergehenden Bf + Dg = 35 + 45 = 80 × 43 ($\frac{1}{2}$ AC) = 3440 = dem Innhalt des Trapeziums ABCD.

Addirt man den Innhalt des Dreyecks AED hinzu; so findet man den Innhalt der Figur wie vorher.

§. 155. Zus. Der Innhalt eines ordentlichen Vielecks ABCDEF (fig. 84.) wird gefunden, wenn man es aus dem Mittelpunkt in Dreyecke zertheilet; hernach aus der gegebenen Grundlinie AB und der Höhe Gf den Innhalt eines Dreyecks sucht, und den gefundenen Innhalt durch die Anzahl der Seiten multiplicirt. Wenn die Anzahl der Seiten in einem ordentlichen Vielecke m ist; so wäre dessen Innhalt $= \frac{AB \times fG}{2} \times m = AB\, fG \frac{m}{2}$. Denn weil in einem ordentlichen Vielecke diese Dreyecke ABG, BGC rc.

BGC 2c. alle einander gleich sind (§. 128.); so findet man den Innhalt aller Dreyecke, wenn man den Innhalt von einem Dreyecke so vielmal nimmt, als das Vieleck Seiten hat.

Ex. Es sey $\frac{1}{2}$ A B =	2 7′
f G =	2 9′
	2 4 3
	5 4
Innhalt des Dreyecks ABC	7 8 3
Zahl der Seiten	6
Innhalt des Sechsecks	4 6° 9 8′

§. 156. Zus. Ein ordentliches Vieleck kann daher in ein Dreyeck verwandelt werden (Fig. 85.), das ihm gleich ist; denn wenn man die Grundlinie eines Dreyecks, so groß als den Umfang des Vieleckes macht; und seine Höhe ebenfalls so groß als die Höhe eines Dreyecks im Vielecke; so sind beide gleich. Weil nämlich die Grundlinie AH des Dreyecks GHF dem Perimeter des Vielecks gleich gemacht ist; so ist AB im Dreyecke = AB im Vielecke, und so jede Linie; folglich haben die Dreyecke ABG und ABG einerley Grundlinie; sie haben aber über das noch einerley Höhe Gf; und diese sind daher einander gleich (§. 99.). Solchergestalt zeigt sich, daß BCG (Fig. 84.) dem BCG (Fig. 85.) gleich sey,

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

und daher endlich das ganze Dreyeck AGH = dem Vielecke ABCDEF.

§. 157. Anm. Für jedes ordentliche Vieleck ist das Verhältniß von fg : AB und gegen den Halbmesser des Kreises bestimmt. Doch läßt sich diese allgemeine Bestimmung der Seite von jedem ordentlichen Vielecke durch den Halbmesser nicht vortragen. Zum Beyspiel kann aber das Sechseck dienen, und eine Idee geben, wie solche Verhältnisse gefunden werden können. Da in dem Sechseck GB = AB (Fig. 86.), so nehme man GB = 1; so ist $\frac{1}{2}$ AB = Af = $\frac{1}{2}$ = 0,5. Da aber $fG^2 = GB^2 - Bf^2$; so ist, wenn man beiderseits die Wurzel auszieht, $fG = \sqrt{(GB^2 - Bf^2)} = \sqrt{(1^2 - 0,5^2)} = \sqrt{(1 - 0,25)} = \sqrt{0,75}$; und wenn man wirklich die Quadratwurzel ausziehet, so findet man die ersten Ziffern davon 0,8660.

Wenn nun der Halbmesser und die Seite eines ordentlichen Vielecks gegeben sind, die im Sechsecke = 1 wären, so läßt sich daraus die Seite eines Vielecks finden, das noch einmal so viel Seiten hat. Es sey (Fig. 86.) AB die Seite des ordentlichen Sechsecks und PB des Zwölfecks, das aus dieser gefunden werden soll; so ist $PB^2 = fB^2 + Pf^2$, und wieder $PB = \sqrt{(fB^2 + Pf^2)}$. Es ist aber fB^2 schon bekannt; denn AB ist = 1 und fB = $\frac{1}{2}$ = 0,5; und

also

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

also $fB^2 = 0,25$. Nun käme es noch darauf an, Pf^2 zu finden. Da man aber FG schon im vorhergehenden gefunden hat, und $Pf = PG = fG$ ist; so wird Pf bekannt, wenn man von dem Halbmesser $PG = 1$ das gefundene G abziehet; und wenn man von diesem Reste das Quadrat macht; so kann man alsdann aus $(fB^2 + Pf^2)$ die Wurzel ziehen, und findet dadurch PB. So ließe sich aus dem Zwölfeck das 24eck, aus dem 24eck das 48eck u. s. w. finden.

In der Ausübung können diese Ausdrücke zur Berechnung noch schicklicher eingerichtet werden. Hier ist es genug, nur die Möglichkeit gezeigt zu haben.

§. 158. Zus. Wenn man aus einem Vielecke, dessen Seite AB ist; ein anders von doppelt so viel Seiten macht; so wird man finden, daß dieses letztern seine Seiten ihren Bogen näher kommen, als des erstern seine. Fährt man auf diese Art immer fort, aus einem Vieleck ein anders von noch einmal so viel Seiten zu machen; so fallen die Seiten des Vielecks endlich in den Umkreis des Cirkels; und das Perpendikel Gf verwandelt sich in den Halbmesser. Ein Vieleck von sehr vielen Seiten wird also dem Umfange des Kreises sehr nahe kommen; und je mehr Seiten das Vieleck hat, desto näher wird es dem Umfange des Kreises kommen. Man siehet hieraus

nun auch einen Weg (§. 157.), wie der Umfang des Kreises durch Rechnung gefunden werden könne.

§. 159. Anm. Durch die Rechnungen des Unendlichen und andere Kunstgriffe, die hier nicht erkläret werden können, läßt sich der Umfang des Kreises bequemmer und genauer finden, als nach §. 157. und 158. Diese Methode wäre ungemein weitläufig und mühesam. Man müßte immer Quadratwurzeln aus Quadratwurzeln ziehen. Christian Huygens (S. seine Schrift de circuli magnitudine inuenta Leyden 1654.) hat zwar diesen Weg abzukürzen gesucht, und gewiesen, wie man mit Vielecken von wenig Seiten den Umfang des Kreises so genau finden könne, als mit Vielecken von mehr Seiten. Ehe aber noch dieser Vortheil bekannt war, hatte Ludolph von Cölln oder nach alter Art Ceulen, den Umfang mit großer Mühe gefunden (S. seine arithmetische en Geometr. fondamenten Leyden 1616, und seine Schrift de circulo & adscriptis Leyd. 1619.). Es ist nach ihm, wenn man den Durchmesser = 1 setzt, der Umfang größer, als 3,14159265358979323846264338327950; aber kleiner als eben diese Zahl, wenn man die letzte Ziffer (0) in 1 verwandelt.

Dieses Verhältniß ist sehr genau; und man kann aus den obigen Zifern das Verhältniß des Durchmessers

messers zum Umfange so genau ausdrücken, als man will; oder die Absicht es erfodert. Insgemein braucht man nur die drey ersten Zifern 3, 14, indem man voraussetzt, daß man den Umfang in Hunderttheilen des Diameters sucht. Eben deswegen sagt man, daß sich der Durchmesser zum Umfang verhalte, wie 100 : 314. Ist es in großen Kreisen nöthig, daß man Tausendtheile in Betrachtung ziehe; so wird das Verhältniß 1000 : 3141; für zehntausend Theile 10000 : 31415 u. s. w.

§. 160. Anm. Da das Verhältniß, welches in vorhergehender Anmerkung angegeben worden, bis auf die letzte Zifer richtig ist (denn 0 ist am Ende zu klein, und 1 zu groß); die Rechnung aber ohne Ende fortgeführt werden müßte, so haben einige wirklich den Umfang noch weiter berechnet. Herr Euler de variis modis circuli quadraturam proxime exprimendi. Commentar. petropolit. T. VIIII. giebt daselbst den Umkreis bis auf 127. Decimalstellen an. Die ersten 100 Zifern hat Machin, alle aber Lagny durch Kunstgriffe gefunden, die Herr Euler noch verborgen nennet. Man kann diese Zifern bey Kästner Analys. des Unendl. §. 308. finden. Unter den alten gab Archimedes (S. dessen Büchelchen de circuli dimensione) das Verhältniß des Diameters zum Umfange, wie 7 : 22. Es giebt aber in großen Cirkeln zu viel. In kleinen Cirkeln kann man

das Verhältniß auch gebrauchen, welches Adrian Metius gegeben, wie 113 : 355. Daß aber auch das Verhältniß des Durchmessers zum Umfang in allen Künsten einerley sey, nimmt man leicht daraus ab: weil die Kreise ähnliche Figuren sind, in welchen also alles einerley seyn muß, ausgenommen die Größe der Figuren selbst.

§. 161. Zus. Da ein Vieleck in ein Dreyeck verwandelt werden kann, wenn man den Umfang des Vielecks zur Grundlinie, und das Perpendikel zur Höhe des Dreyecks nimmt (§. 156.) und der Kreis als ein Vieleck betrachtet werden kann, das unendlich viele Seiten hat (§. 158.); so ist auch der Kreis einem Dreyecke gleich, dessen Grundlinie die Peripherie, und dessen Höhe der Halbmesser ist. Daher wird auch der Inhalt eines Kreises gefunden, wenn man seine Peripherie durch die Hälfte des Halbmessers oder vierten Theil des Durchmessers multiplicirt Oder man kann auch die halbe Peripherie mit dem ganzen Halbmesser multipliciren. Denn der Innhalt ist $= \frac{pr}{2} = \frac{p}{2}r$.

§. 162. Man kann alle Figuren durch Quadrate ausrechnen, wie man aus dem bisher gesagten gesehen hat; ja auch dieselbe in Quadrate verwandeln. Es wird also die Erfindung des Innhalts einer Fläche, ihre **Quadratur** genannt. Hauptsächlich ist aber dieser Namen vom Kreise und andern krummlinichten Figuren gewöhnlich. Wüßte man das

Ver-

Verhältniß des Diameters zur Peripherie in vollkommener geometrischer Schärfe, so könnte man auch den Kreis vollkommen quadriren. Wie man aber aus §. 154. sehen kann; so läßt sich die Quadratur des Kreises immer so genau finden, als man es nur in der Ausübung verlangt. Daß aber eine solche bestimmte Quadratur des Kreises unmöglich sey, oder auch, daß sie möglich sey, ist noch nicht erwiesen. Unter der *unbestimmten* Quadratur des Kreises verstehet man in der höhern Mathematik noch etwas anders, dessen Unmöglichkeit erwiesen ist. Aber, wenn auch die Quadratur möglich ist; so läßt sich noch erst fragen: ob das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange rational, oder irrational seyn werde. Im letzten Falle würde die Erfindung nichts weiter lehren, als was man schon weiß. Denn, wenn z. B. das Verhältniß des Diameters zum Umfange genau wäre, wie $1 : \sqrt{10}$, so würde die Quadratwurzel eine unendliche Reihe Decimalbrüche geben; welche man endlich einmal abbrechen müßte, weil man doch nicht ins Unendliche fortfahren kann. Dem Vermuthen nach ist aber dieses Verhältniß irrational; doch ist es nicht bewiesen, daß es irrational seyn müsse. Sturm Mathes. enucl. L. 1. §. 2. Prop. 43. sucht diese Irrationalität zu beweisen; der Beweis ist aber, wie Hr. Hofr. Kästner und andere anmerken, noch Zweifeln unterworfen. Wäre aber wider Vermuthen das Verhältniß auch rational; so würden doch dar-

aus weder im gemeinen Leben, noch in der angewandten Mathematik größere Vortheile als aus dem Ludolphischen Verhältnisse entstehen. Alles, was zu hoffen wäre, würde seyn: daß der Beweis allenfalls zur Erfindnng anderer Wahrheiten Anlaß geben könnte; wenn sie die Rechnung des Unendlichen nicht irgend schon gefunden hat.

§. 163. Anm. Es läßt sich daraus schließen, wie viel Einsicht die haben, welche die Quadratur noch suchen. Es sind auch in der That nur solche, die selbst nicht wissen, was sie suchen, und die Sache nicht im ganzen Umfange übersehen, wozu ihnen gemeiniglich die nöthigen Kenntnisse fehlen. Fast alle Jahre tretten einige hervor, die sie gefunden haben wollen. So lieset man in dem Mercure de France 1762, daß einer 25 Jahre darauf gewandt habe, und der dann endlich Zahlen herausgebracht, wovon Kästner sagt: " Weil sie sich nicht so verhalten können, so hat der gute Mann seine mehr als 25 Jahr sehr übel zugebracht. „ Vor ungefähr einem Jahre wandte sich ein polnischer Officier mit einer solchen Erfindung gar an den Reichstag. Die Göttinger gelehrten Anzeigen zeigten aber bald, was von dieser Erfindung zu halten sey. In des berühmten Krafts Dissert. de Quadratura circuli praesertim Merkeliana und seiner Geom. sublimior. sect. III. de circulo, wie auch in Montucla histoire des Re-

cher-

cherhes sur la quadrature du cercle. Paris 1754. werden verschiedene solche Quadraturen erzählt, und in ihrer Blöße dargestellt. Um diesem Unwesen Einhalt zu thun, ist, den neuesten öffentlichen Nachrichten zu Folge, die berühmte königl. Akademie zu Paris bewogen worden, zu declariren, daß sie ins künftige keine Schriften über diesen Gegenstand mehr annehmen werde; weil daraus den Wissenschaften kein Vortheil, und den Mitgliedern nur Zeitverlust zuwachse.

Weil das Ludolphische Verhältniß in den ersten 31 Decimalbrüchen richtig, und als eine Näherung erwiesen ist; und da keine Wahrheit einer andern widersprechen kann; so hat man ein Recht, alle vorgegebene neu erfundene Verhältnisse mit dem genannten zu vergleichen, und ohne weiters Disputiren zu verwerfen, wenn es nicht damit übereinstimmt. Es ist noch übrig zu zeigen, wie eine solche Vergleichung kann angestellt werden. Wir wollen z. B. das archimedische Verhältniß 7 : 22 nehmen. Um dieses letztere auf des Ludolphs seines zu reduciren, dividire man beiderseits mit 7, so wird 1, : 3, 142 ... und giebt also schon im dritten Decimalbruche den Tausendtheilen zu viel. Des Metius Verhältniß war 113 : 355. Man dividire beiderseits mit 113, so wird 1 ; 3, 1415929 ... das also bis auf 6 De-

cimalstellen richtig ist, und erst in der siebenten vom Ludolphischen abgehet.

Uebrigens zeigt die Analysis, daß sich wohl Stücke vom Kreise vollkommen quadriren lassen. Unter den Alten zeigte schon Hippocrates (nicht der Arzt), wie gewisse Mondförmige Stücke des Kreises quadrirt werden könnten, die auch daher vom Erfinder Lunulae Hippocratis genannt werden. Noch andere Lehren vom Kreise und den Figuren überhaupt, die man bey Pappus Alexandrinus in collect. Mathem. findet, lassen sich hier nicht wohl vortragen.

§. 164. Aufg. Aus dem gegebenen Durchmesser eines Kreises seinen Umfang zu finden.

Aufl. Man suche zu 100, 314 und dem gegebenen Durchmesser die vierte Proportionalzahl, nach der Regel Detri. Z. E. Es sey der Durchmesser $= 56'$, so ist $100 : 314 = 56' : \frac{314 \times 56}{100} = \frac{17584'}{100}$ $= 17^{\circ}\, 5'\, 8''\, 4'''$.

§. 165. Zus. Wäre die Peripherie eines Kreises z. E. $17584'''$ gegeben, so könnte man den Durchmesser vermittelst der Proportion finden $314 : 100$ $= 17584''' : \frac{17584 \times 100}{314} = \frac{1758400'''}{314} = 5600'''$ $= 56'$.

§. 166. Zus. Der Innhalt des Kreises wird aus dem gegebenen Diameter gefunden, wenn man erst nach §. 164. die Peripherie sucht, und diese durch den vierten Theil des Diameters multiplicirt. Z. E. wenn der Diameter = 56′; so war die Peripherie = 17584‴ (§. 164.) gefunden. Nun ist $\frac{1}{4}$ Diameter = 14′ oder 1400‴; folglich der Innhalt 24° 61′ 76″ 00‴.

Wäre die Peripherie des Kreises gegeben, und man wollte daraus den Inhalt suchen; so müßte man erst nach §. 161 den Durchmesser berechnen, und dann den vierten Theil davon mit der Peripherie multipliciren.

§. 167. Lehrs. Der Inhalt eines Kreises verhält sich zum Quadrate seines Durchmessers beynahe wie 785. : 1000.

Bew. Wenn der Diameter 100, so ist der Umfang beynahe 314 (§. 159.). Folglich ist das Quadrat des Diameters = 100 × 100 = 10000 und der Innhalt des Kreises = 314 × $\frac{100}{4}$ (§. 166.) = 314 × 25 = 7850. Und also verhält sich der Inhalt zum Quadrate des Durchmessers wie 7850 : 10000, oder wenn man beiderseits mit 10 dividirt = 785: 1000. Das Verhältniß ist aber nur beynahe wahr; weil

weil die Peripherie = 314 in der Rechnung genommen wurde, die doch mehr ausmachte (§. 159.).

§. 168. Zus. Wenn der Inhalt eines Kreises gegeben ist; so kann man nach vorstehendem Lehrsatze den Durchmesser unmittelbar finden. Man dürfte nur zu 785 : 1000 und den gegebenen Inhalt die vierte Proportionalzahl suchen; so bekäme man das Quadrat des Diameters des gegebenen Kreises. Hieraus die Quadratwurzel gezogen, giebt den Durchmesser selbst. Z. E. Es sey der Inhalt eines gegebenen Kreises = 246176″; so ist zu 785 : 1000 und 246176 die vierte Proportionalzahl 313600‴. Die Quadratwurzel ist aber = 56′.

Daß man auch wieder nach diesem, wenn man den Diameter gefunden hat, die Peripherie berechnen könne, ist für sich klar.

Umgekehrt diente auch dieses Verhältniß, um aus dem gegebenen Diameter den Inhalt des Kreises zu finden. Man müßte nämlich von dem gegebenen Diameter das Quadrat machen, und schließen 1000 : 785 = das Quadrat des gegebenen Diameters : Inhalt dieses Kreises. Z. B. Es sey wieder der Durchmesser = 56′, so ist das Quadrat davon 3136′. Also 1000 : 785 = 3136′ : $\frac{3136 \times 785}{1000}$. Und wenn man wirklich multiplicirt, und dividirt, so

so findet man $\frac{246176'}{100}$ oder 2461' + $\frac{76'}{100}$, welcher letztere Bruch = 76'', daß also der Inhalt = 24° 61' 76''.

§. 169. Aufg. Aus dem gegebenen Halbmesser eines Kreises und dem Winkel, den die zween Halbmesser miteinander machen, den Inhalt des Ausschnitts zu finden.

Aufl. Es sey in Fig. 87. der Halbmesser CA = 4'. Der Winkel ACB oder der Bogen AB = 50°; so suche man 1.) zu 100 : 314 und dem gegebenen Halbmesser 4' die vierte Proportionalzahl; und man findet die halbe Peripherie des Kreises, der 4' zum Halbmesser hat, im Längenmaaß. Hätte man zu 100 : 314, und dem doppelten Halbmesser oder Durchmesser die vierte Proportionalzahl gesucht; so würde auch die ganze Peripherie gefunden worden seyn. Es ist also 100: 314 = 4' : 12' 5'' 6'''. Man mache nun ferner die Proportion : der halbe Cirkel oder 180° geben 1256''' im Längenmaaß, was geben 50°; so findet man den Bogen 50° im Längenmaaß, nämlich 180 : 1256''' = 50° : 348 $\frac{8}{9}$'''. Man multiplicire diese gefundene Grundlinie 348$\frac{8}{9}$ in die halbe Höhe; das ist in $\frac{4}{2}$ = 2 oder 200'''; so bekömmt man den Inhalt des Ausschnitts = 69777''', wenn man den übrig bleibenden Bruch wegläßt.

Hätte

Hätte man zu 1000 : 3141, und den gegebenen Halbmesser die vierte Proportionalzahl gesucht; so fände man die Peripherie und folglich den Inhalt des Ausschnitts genauer.

§. 170. Zus. Um den Inhalt des Abschnitts ABGA (Fig. 87.) zu finden, muß erst der Inhalt des Ausschnitts ACBGA und dann der Inhalt des Dreyecks ACB gesucht, und der Inhalt des letztern von dem ersten abgezogen werden; so bleibt der Inhalt des Ausschnitts übrig. Die Berechnung selbst wird weiter unten angezeigt werden.

§. 171. Lehrs. Die Flächen zweener Kreise verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Durchmesser.

Bew. Es heiße die Fläche des größern Cirkels C, das Quadrat seines Durchmessers D^2, und die Fläche des kleinern Cirkels c das Quadrat seines Durchmessers d^2; so ist $C : D^2 = 785 : 1000$ (§. 167.). Weil nun Kreise ähnliche Figuren sind; so hat des kleinern Kreises Inhalt eben das Verhältniß zum Quadrate seines Diameters, oder $c : d^2 = 785 : 000$. Folglich weil zwey Verhältnisse einem dritten hier gleich sind $C : D^2 = c : d^2$, oder permutando $C : c = D^2 : d^2$.

§. 172. Zus. Es ist §. 103 gezeigt worden, wie

wie ein gegebenes Quadrat könne verdoppelt werden. Es war daselbst in der 58ten Figur $AB^2 = 2 BC^2$. Auf die nämliche Art kann ein Kreis beschrieben werden, der doppelt so groß als ein andrer gegebener ist. Denn wenn in der nämlichen Figur BC der Diameter eines Kreises ist, und BC = CA gemacht wird; so ist AB der Diameter eines Kreises, dessen Fläche zweymal so groß ist, als die Fläche des Kreises, welche BC zum Diameter hat. Die Flächen der Cirkel verhalten sich nämlich, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Folglich da auf die beschriebene Art das Quadrat des Durchmessers AB doppelt so groß, als das Quadrat des Durchmessers BC gemacht werden kann; so wird auch der Inhalt des Kreises, der AB zum Durchmesser hat, doppelt so groß seyn, als der Inhalt des Kreises, dessen Durchmesser BC ist.

§. 173. Anm. Die Lehre vom Kreise findet man bey **Kästner** ausführlicher vorgetragen. Wer über die ersten Anfangsgründe schreiten will, muß gedachten Schriftsteller nachlesen. Hier ist in der Lehre vom Kreise der wolfische Vortrag erwählet worden, weil man ihn für leicht hält.

Verschiedene Verwandlungen der Figuren in andere von gleichem Inhalte verstehet ein nachdenkender Schüler aus den Lehrsätzen selbst. Die vorgesetz-

gesetzten Gränzen verstatten es übrigens nicht, daß noch andere angeführt werden. Noch einer Aufgabe dieser Art will ich hier kurz gedenken. Man findet sie in Segners Anfangsgründen. Eine Figur ABCDE (Fig. 88.) von so viel Seiten als man will, in eine andere zu verwandeln, die von gleichem Inhalt ist, und eine Seite weniger hat. Man schneide in der gegebenen Figur ABCDE ein beliebiges Dreyeck ABC ab; mit AC ziehe man durch B ein Parallele; man verlängere alsdann DC bis an die gezogene Parallele, so daß DC, und CF eine einzige gerade Linie DF ausmachen. Ziehet man nun aus F nach A eine Linie, so ist das Viereck AFED so groß als das Fünfeck ABCDE. Denn beiden ist das Stück ACED gemein; und da auch die Dreyecke ABC, AFC gleiche Grundlinie und Höhe haben, so sind beide auch einander gleich (§.99.); folglich ACED + ABC = ACED + AFC. Jetzt könnte man das Viereck wieder in ein Dreyeck von gleichem Inhalte auf die gemeldete Art verwandeln. Diese Methode ist sehr allgemein, und giebt uns ein leichtes Mittel an die Hand, jedes Vieleck in ein ihm gleiches Dreyeck zu verwandeln.

IV. Abschnitt.

Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 174. Erkl. Es ist §. 40. schon deutlich aus einander gesetzt worden, was zu der Aehnlichkeit der Figuren erfordert wird; und man wird ans den daselbst angegebenen Merkmalen leicht einsehen, daß Figuren von einer Art ähnlich genannt werden, wenn gleiche Winkel und proportionale Seiten darinn angetroffen werden. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∾.

§. 175. Zus. Ebenfalls aus dem §. 40. angezeigten Merkmalen, welche zur Aehnlichkeit erfodert werden, zeigt sich, daß jedes gleichseitige Dreyeck einem andern gleichseitigen Dreyecke, jedes Quadrat einem andern Quadrate, jedes reguläre Fünfeck einem andern regulären Fünfeck, und überhaupt alle reguläre Figuren von einer gleichen Anzahl von Seiten einander ähnlich sind, auch da man sich die Kreise als reguläre Vielecke von unendlich vielen Seiten vorstellen kann; so fließt ihre Aehnlichkeit, die schon erwiesen worden, auch aus diesen Grundsätzen.

§. 176. Lehrs. Zwey Parallelogrammen, welche gleiche Grundlinien, aber verschiedene Höhe haben,

verhalten sich, wie diese verschiedene Höhen. Haben sie aber gleiche Höhen; so verhalten sie sich wie die verschiedenen Grundlinien.

Bew. Es heiße das Parallelogramm P, das andere p (fig. 89.); des erstern Grundlinie G, seine Höhe H, des andern Grundlinie g, seine Höhe h; so ist $P = G \times H$ (§. 148.) und $p = g \times h$ (§. cit.) Folglich $P : p = G \times H : g \times h$. Da aber die Grundlinien vermöge der Annahme gleich sind, oder $G = g$; so ist $P : p = G \times H : g \times h$. Das ist, wenn man die beiden letztern Glieder der Proportion durch G dividirt, $P : p = H : h$. Eben so ist, wenn man $H = h$ setzt, $P : p = H \times G : H \times g$, und beide letzte Glieder durch H dividirt $P : p = G : g$.

§. 177. Zus. Da die Hälften des Verhältnisses haben müssen, was die Ganzen haben; so ist $\frac{P}{2} : \frac{p}{2} = G : g$, wenn die Höhe der Parallelogrammen gleich ist. Da nun ein Dreyeck allemal die Hälfte von einem Parallelogramm ist, das gleiche Grundlinien haben, wie die Höhen, und Dreyecke von gleichen Höhen, wie die Grundlinien verhalten (§. 176.)

§. 178. Lehrs. Wenn in einem Dreyecke ACB (fig. 90.) eine Linie MN parallel mit einer Seite AB gezogen wird, und diese Parallele MN die beiden Schenkel AC, BC schneidet; so verhalten sich die ganzen Seiten AC, CB, eben so, wie die obern

oder

oder unten abgeschnittenen Stücke; das ist, es verhält sich: 1) AC : CB = CM : CN. 2) AC : CB = MA : NB.

Bew. Man ziehe NA und MB, so ist das Dreyeck MNA = MNB, weil sie beide gleiche Grundlinie und Höhe haben (§. 99.) Man setzte zu jedem das Dreck MCN; so ist MNA + MCN = MNB + MCN; das ist, das Dreyeck CNA ist = dem MCB. Wenn man nun die Dreyecke CNA und CNM betrachtet; so ist des ersten Grundlinie CA und des andern CM. Sie stossen aber beide in der Spitze M zusammen; und haben daher einerley Höhe, und verhalten sich folglich wie die Grundlinien (177.) Eben so haben die CMB, CNM einerley Höhe, weil sie in der Spitze M zusammenstossen; aber verschiedene Grundlinien CB, CN. Man kann also schließen: CNA : CNM = CA : CM (§. 177.) Und da CNA : MCB, wie schon erwiesen, so ist MCB : CNM = CA : CM. Da aber auch MCB : CNM = CB : CN (§. 177.), so wird CA : CM = CB : CN; oder permutando CA : CB = CM : CN.

Der zweyte Satz wird so erwiesen. Vermöge des vorhergehenden war CA : CM = CB : CN. Also ist auch CA — CM : CM = CB — CN : CN. Das ist MA : CM = NB : CN; oder permutando MA : NB = CM : CN. Nun war nach N. 1. CA :

 CB

CB = CM : CN; folglch weil zwey Verhältnisse einem dritten gleich sind, so ist MA : NB = CA : CB.

§. 179. Lehrs. Sind die zwo Seiten CA, CB eines Dreyecks ACB (fig. 91.) solchergestalt von einer andern geraden Linie MN durchschnitten, daß sich die ganzen Seiten, wie die obern und untern abgeschnittenen Stücke verhalten; so ist die Linie MN mit der entgegenstehenden Seite A B in dem Dreyecke parallel.

Es muß also hier gezeigt werden, wenn CA : CB = CM : CN ist, daß MN parallel mit AB sey.

Bew. Die gerade Linie MN ist entweder mit AB parallel oder nicht. In dem letzten Falle ziehe man durch den Punkt M eine andere, die dann parallel mit AB ist. Diese Parallele kann entweder über, oder unter MN fallen. Sie falle z.B. über MN, und sey = MN; so wäre nach §. 178. CA : CB = CM : Cn. Es sey aber CA : CB = CM : CN angenommen worden; also CM : Cn = CM : CN, oder CM : CM = Cn : CN. Da nun CM = CM; so mußte auch folgen, daß Cn = CN, oder daß der Theil Cn so groß, als das ganze CN sey; welches ungereimt und unmöglich ist. Und da nun auch ferner durch den nämlichen Beweis gezeigt wird, daß ein Widerspruch herauskomme, wenn eine Linie unter-

halb

halb MN durch den Punkt M mit AB parallel sollte gezogen werden, so kann unter der angenommenen Bedingung keine Linie oberhalb und unterhalb MN, die durch den Punkt M gezogen worden, mit AB parallel seyn; und folglich muß es die MN selbst seyn.

§. 180. Lehrs. Wenn zween Winkel eines Dreyecks ABC (fig. 92.) zweenen Winkeln eines andern Dreyecks abc gleich sind; so sind die Dreyecke ähnlich. Das heißt, es ist auch der dritte Winkel des einen Dreyecks dem dritten des andern gleich, und die Seiten, welche einerley Winkel einschließen, haben in beiden Dreyecken einerley Verhältniß.

Es ist also zu beweisen, das, wenn $C = c$ und $A = a$, auch das Dreyeck $ACB \backsim acb$; das heißt (§ 40. und 174.) daß $B = b$ und $CA : CB = ca : cb$; $CA : AB = ca : ab$; $AB : BC = ab : bc$.

Bew. Aus der angenommenen Gleichheit zweener Winkel in beiden Dreyecken folgt das von selbst, daß der dritte Winkel B in dem einen Dreyecke dem dritten b im andern gleich sey. Um nun auch zu beweisen, daß die Seiten, welche einerley Winkel in beyden Dreyecken einschließen, einerley Verhältniß haben; so mache man aus dem Scheitel C des größern Dreyecks ACB, $CE = ca$ und $CF = cb$. Da nun vermöge der Bedingung auch $C = c$ ist; so ist, nach-

dem EF gezogen worden, das Dreyeck (§. 143.) CEF = cab, und der Winkel CEF = a. Vermöge der Annahme war aber a = A: folglich CEF = A. Da CEF der äußere, und A der innere entgegengesetzte Winkel, und beide gleich sind; so folgt (§. 69.) daß EF parallel mit AB sey; und man kann derohalben die Proportion machen (§. 178.) CA: CB = CE: CF. Es ist aber CE = ca, und CF = cb gemacht worden, und also CA : CB = ca : cb.

Vollkommen auf die nämliche Art wird gezeigt, daß auch die übrigen Seiten in beyden Dreyecken, die einerley Winkel einschließen, einerley Verhältniß haben. Man trägt z. B. B im größern Dreyecke auf die Seite BC die bc; auf BA die Seite ba, und verfährt wie oben im Beweis.

Die dritte Proportion folgt alsdann aus den zwo ersten von selbst. Man darf nur in beiden alternando schließen; so findet man, daß zwey Verhältniße einem dritten, und folglich unter sich selbst gleich sind, welches dann die dritte Proportion ist, die im Satze stehet.

§. 181. Zus. Wird also in einem Dreyecke ABC (fig. 90.) eine Linie MN parallel mit AB gezogen; so ist das kleinere Dreyeck CMN allemal dem CAB ähnlich. Deswegen finden auch außer den §. 178.

ange-

angeführten Proportionen noch folgende statt. CM : MN = CA : AB, und permutando CM : CA = MN : AB; wie auch CN : NM = CB : BA, und wieder permutando CN : CB = NM : BA.

§. 182. Lehrs. Wenn in zweyen Dreyecken ABC und abc (fig. 92.) ein Winkel des einen Dreyecks einem Winkel des andern gleich ist; und die Seiten, welche diese Winkel in beyden Dreyecken einschließen, einerley Verhältniß haben; so sind die ganzen Dreyecke einander ähnlich.

Es soll also bewiesen werden, daß wenn in C = c und CA : CB = ca : cb, daß das Dreyeck ACB ∾ acb.

Bew. Man mache CE = ac und CF = cb, und weil überdas C = c vermöge der Bedingung ist; so ist das Dreyeck CEF = acb (§. 43.): und also auch der Winkel CEF = a. Nun ist aber vorausgesetzt worden, daß CA : CB = ca : cb; das ist, weil CE = ac und CF = cb gemacht worden, CA : CB = CE : CF. Es muß derohalben nach §. 179. die Linie EF mit der AB parallel seyn. Alsdann aber ist auch der äußere Winkel dem innern entgegengesetzten gleich (§. 169.); oder CEF = A. Es war aber auch CEF = a, wie oben erwiesen worden: folglich A = a. Da auch nach dem, was angenommen worden ist, C

Anfänger müssen diese Lehre wohl überdenken, weil sie (wie die Lehre von den Proportionen in der Arithmetik) von ungemein großen Einfluß auf die übrigen Theile der Mathematik ist.

§. 185. Zu dreyen gegebenen Linien die vierte Proportionallienie zu fiuden.

Aufl. Es mögen die drey gegebenen Linien, zu welchen die vierte Proportionallinie gesucht werden soll, MN, PQ, RS (fig. 93.) seyn. Man zeichne einen Winkel A nach Belieben; und trage auf einen Schenkel desselben aus A die erste Linie, und auf den andern Schenkel die andere Linie, so daß AB = MN und AC = PQ sey, und ziehe CB. Auf den Schenkel, worauf man die erste getragen hat, trage man auch von A aus die dritte, daß AD = RS werde. Alsdann ziehe man durch dan Punkt D mit AB eine Parallele DF, so ist AF die vierte Proportionallinie zu den drey gegebenen.

Bew. Da DF mit CB parallel gezogen worden; so ist nach §. 178. AB : AC = AD : AF. Da aber AB = MN; AC = PQ; AD = RS gemacht worden; so ist MN : PQ = RS; AF, und folglich AF, zu den drey gegebenen die vierte Proportionallinie.

§. 186. Anm. Man könnte auch die dritte gegebene Linie RS von B aus an die erste AB ansetzen, und BD = RS machen, so würde die CF die vierte Proportionallinie; denn es ist AB : AC = AD : AF, und AD : AF = BD : CF. Folglich AB : AC = BD : CF. Man brauchte aber dann einen größern Raum. Diese Auflösung (§. 185.) nennet man die **Regel de Tri in Linien.**

§. 187. Zus. Wenn die zweyte gegebene Linie RQ der dritten RS gleich ist; so ist von einer stetigen Proportion die Rede; und wenn also zu zwoen gegebenen Linien MN, RQ die dritte proportionale Linie gesucht werden soll; so darf man nur die zwote Linie RQ zugleich als die dritte betrachten, und wie vorher verfahren.

§. 188. Aufg. Eine gegebene gerade Linie MN (fig. 94.) in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen, z. B. in fünf gleiche Theile.

Aufl. Man trage auf eine gezogene Linie von unbestimmter Länge AB so viel gleiche willkührliche Theile, als die gegebene Linie bekommen soll, z. E. hier fünfe, daß also AB = BC = CD = DE = EF ist. Ueber der ganzen Linie AF beschreibe man ein gleichseitiges Dreyeck AGF. Man fasse die gegebene Linie MN mit dem Zirkel, und trage sie von G aus, auf

beide

beide Schenkel GA und GF; daß also Gm = MN und Gn = MN werde, und ziehe mn, durch G und B, G und C, G und C, G und E, ziehe man gerade Linien; so muß mn = MN und mb der fünfte Theil von MN seyn.

Bew. Es ist GA = GF und Gm = Gn gemacht worden. Derohalben kann man schließen GA: GF = Gm : Gn. Aus dieser Proportion aber folgt, daß mn parallel mit AB sey (§. 179.). Und alsdann ist (§. 181.) GA : AF = Gm : mn. Da aber GA = AF vermöge der Construction ist, so ist auch Gm = mn. Es ist nun Gm = MN ebenfalls vermöge der Construction: derohalben mn = MN.

Weil nun ferner die ganze Linie mn mit AB parallel ist, so ist auch der Theil mB parallel mit AB; und folglich wieder GA : AB = Gm : mb. Es ist aber GA = AF, und Gm = mn, wie schon erwiesen worden. Also AF : AB = mn : mb; aber AF : AB 5 : 1, daher mn : mb = 5 : 1.

§. 189. Zus. Eine gegebene Linie PQ ließe sich auf die vorbeschriebene Art (§. 188.) nach eben der Proportion theilen, nach welcher eine andere gegebene Linie AB getheilt ist. Denn, wenn man wieder über der Linie AB (fig. 95.) ein gleichseitiges Dreyeck ABC beschreibt, und auf die Schenkel CA,

CB die gegebene Linie PQ trägt; so läßt sich 1) wie im vorhergehenden Beweis zeigen, daß pq = PQ, und 2) daß AB : AD = pq : pa, so daß jedes Stück von pq das nämliche Verhältniß zur ganzen Linie pq hat, welches jedes Stück von AB, zur ganzen AB hat.

§. 190. Lehrs. Wenn zwo Figuren einander ähnlich sind, so verhält sich der ganze Umfang, oder Perimeter der einen zum ganzen Umfange der andern, wie diejenigen einzelnen Seiten in beiden Figuren, welche an einerley Winkel liegen.

Wenn das Dreyeck ABC dem Dreyecke abc ähnlich ist (fig. 96.) so ist (§. 174.) der Winkel A = a, B = b, C = c, und also AB : BC = ab : bc; BC : BC : CA = bc : ca; AB : AC = ab : ac. Hieraus muß nun bewiesen werden, daß AB + BC + AC : ab + bc + ac = AC : ab, oder BC : bc, oder = CA : ca.

Bew. Da AB : BC = ab : bc; so ist componendo AB + BC : BC = ab + bc : bc; permutando AB + BC : ab + bc = BC : bc. Nun ist BC : bc = CA : ca vermöge der Bedingung, wenn man permutando schließt. Also AB + BC : ab + bc = CA : ca; oder AB + BC : CA = ab + bc : ca; das ist componendo AB + BC + CA : CA = ab + bc + ca : ca; und permutando AB + BC + CA : ab + bc + ca = CA : ca. Da sich aber vermöge der

Bedin-

Bedingung oder des Begriffs der Aehnlichkeit AC und ac, wie BC zu bc, und diese wie AB : ab verhalten, so ist offenbar, daß man statt des Verhältnißes CA : ca das BC : bc oder AB : ab setzen kann.

In jeder Figur von mehr Seiten wird der Beweis auf eben eine solche Art geführt.

§. 191. Zus. Wenn man in zwoen ähnlichen Figuren ABCDE, abcde (fig. 97.) aus gleichnähmigen Winkeln Diagonalen ziehet, z. B. EC, EB, ec, eb; so werden auch die dadurch enstehenden Dreyecke einander ähnlich, nämlich EDC ∽ edc, EBC ∽ ebc, EAB ∽ eab. Denn da die Figuren ähnlich sind; so haben sie gleiche Winkel und Seiten die in einerley Verhältniß stehen. Folglich ist D = d und ED : DC = ed : dc, und daher das Dreyeck EDC ∽ edc (§. 182.) und der Winkel DCE = dce (§. cit.). Eben so ist A = a, und EA : AB = ea : ab. Das Dreyeck EAB ∽ eab, und der Winkel ABE = abe. Da nun auch der Winkel DCB = dcb vermöge des Begriffs der Aehnlichkeit und der Winkel DCE = dce, wie schon erwiesen; so ist DCB — DCE = dcb — dce; das heißt ECB = ecb. Da ferner vermöge der Bedingung des Satzes der Winkel ABC = abc, und ABE = abe nach dem erwiesenen; so ist wieder ABC — ABE = abc — abe; das ist, der Winkel EBC = ebc. Es sind also in

den

den mittelsten Dreyecken dieser Figur EBC, ebc zween Winkel des einen, nämlich ECB, und EBC den zween Winkel des andern, nämlich ecb, ebc gleich, folglich auch die Dreyecke EBC, ebc ähnlich (§. 180.).

§. 192. Zus. Die Perimeter ähnlicher Figuren verhalten sich, wie alle Diagonallinien, die aus einerley Winkel gezogen werden. Denn man heiße den Umfang ABCDE der 97sten Figur P; und den Umfaug oder Perimeter abcde nenne man p; so ist, weil das Dreyeck EDC ∽ edc, auch DE : EC = de : ec; permutando DE : de = EC : ec. Es ist aber DE : de = P : p (§. 190.). Folglich EC : ec = P : p. So wird auch gezeigt, daß die Perimeter in diesen ähnlichen Figuren sich verhalten, wie die Diagonalen EC, ec.

V. Abschnitt.

Von einigen Proportionen bey dem Kreise.

§. 193. Lehrs. Wenn man durch einen innerhalb, oder außerhalb des Kreises angenommenen Punkt A (fig. 98. und 99.) zwo gerade Linien ziehet, welche die Peripherie des Zirkels in den

Punk-

Punkten B, C, D, E schneiden; so verhält sich AB : AD = AE : AC.

Bew. Wenn man in beiden Figuren die Linien BE und DC ziehet; so sind in den Dreyecken ABE, DAC die Winkel bey A einander gleich. Ueberdas sind BCD und BED Winkel am Umkreise, welche auf einerley Bogen BD stehen, und daher einander gleich. Die Dreyecke ABE, ADC sind folglich einander ähnlich, und die Seiten welche gleiche Winkel einschließen, proportional. Die Proportion AB : AD = AE : AC ist also richtig.

§. 194. Zus. Wenn der Punkt A außerhalb des Kreises angenommen wird, so wird DE (fig. 100.) immer kleiner, je größer der Winkel A wird. Endlich muß DE ganz verschwinden, wenn AD so gezogend wird (fig. 101.), daß sie nur den Zirkel berührt. In diesem Falle fielen dann die Punkte D und E in einen zusammen, und es wird dadurch AB : AD = AD : AC; das heißt: AD wird die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC.

§. 195. Zus. Nimmt man aber den Punkt A innerhalb des Zirkels an; so kann man DE dergestalt ziehen, daß sie in dem Punkte A in zween gleiche Theile getheilet wird. Man müßte BC durch den Mittelpunkt des Kreises ziehen, und DE perpendicu-

lar

lar auf BC setzen (fig. 102.); so würde AD = AE werden; und die Proportion (§. 193.) AB : AD = AE : AC verwandelte sich in diese: AB : AD = AD : AC. Folglich würde AD wiederum die mittlere Proportionallinie zwischen AB und AC.

§. 196. Anm. Der Lehrsatz §. 193. ist wegen seiner Allgemeinheit hauptsächlich zu bemerken, und wird in der Trigonometrie unter andern gebraucht werden. Ich bin hier im Vortrage dem Euklides, Segner, Clemm u. a. gefolget. Sonst findet man nur in mathematischen Lehrbüchern den besondern Fall §. 193. erwiesen, wenn eine Sehne den Durchmesser perpendicular schneidet. Es ist dieser Fall freilich wegen seines großen Einflußes auf andere mathematische Sätze zu bemerken, und in dem folgenden §. will ich deswegen den gewöhnlichen Beweis, wie er unabhängig von §. 193 geführt wird, auch beybringen. Hr. Sulzer hat den Begriff der Schönheit, in so fern sie der Verstand erkennet, und deutlich vorstellet, aus dem Lehrsatze §. 193 erläutert. Man sehe Clemm in der Geometrie §. 548

§. 197. Anm. Um noch auf eine andere Art zu zeigen, daß jede Perpendicularlinie von der Peripherie auf den Durchmesser gezogen, die mittlere Proportionale zwischen den beiden abgeschnittenen Stücken des Durchmessers sey; so ziehe man in Fig.

103. die Linien BD und DC. Dadurch wird das Dreyeck BDC dem ADC ähnlich. Denn BDC ist ein rechter Winkel, weil er an der Peripherie stehet, und also zu seinem Maaße den halben Bogen hat, worauf er stehet, das dann ein Quadrat ist. Und da die DA auf die BC senkrecht gezogen ist, so ist DAC auch ein rechter. Folglich der Winkel BDC = DAC. Es ist aber noch überdas der Winkel o beiden Dreyecken gemein, und derohalben (§. 180.) sind die Dreyecke selbst einander ähnlich; und auch der dritte Winkel des einen Dreyecks nämlich n ist dem dritten Winkel des andern Dreyecks nämlich m gleich. Wenn man nun die Dreyecke ABD, DAC betrachtet, so ist nach dem Erwiesenen der Winkel m = n, und DAC = DAB, weil es beide rechte sind. Daher ist das Dreyeck BAD ∽ ADC (§. 180.), und die Seiten, welche gleiche Winkel einschließen, proportional, BA : AD = AD : AC.

Wenn BA und AD in Zahlen gegeben wären; so ließe sich AC finden nach der Regel de Tri. Z. E. es sey BA = 83'' AD = 166''; so wäre 83'' : 166'' = 166'' : $\frac{166 \times 166''}{83}$ = 332'' = AC. Addirt man zu AC noch BA; so wäre AC + BA dem Diameter gleich. Also nach obigen Zahlen 332'' + 83'' = 415'' = Diameter. Dividirt man durch 2, so findet man den Halbmesser, und folglich den Mittelpunkt des Kreises. Z. E. $\frac{415'''}{2}$ = 2075''' = dem Halbmesser.

§. 198.

§. 198. Zus. Da nach §. 193 und 195 BA : AD = AD : AC ist; so erhellet daraus, daß das Quadrat, das über der Linie BA beschrieben werden kann, dem Rechtecke gleich sey, dessen beide aneinander liegende Seiten BA, AC sind. Denn, wenn man in der Proportion BA : AD = AD : AC das Product der äußern und mittlern Glieder macht, so erhält man $BA \times AC = AD^2$.

§. 199. Zus. Man setze BA = 1; so wird das Product §. 196. in dieses verwandelt, $1 \times AC = AD^2$; oder $AC = AD^2$. Und wenn man beiderseits die Quadratwurzel ausziehet, $\sqrt{AC} = \sqrt{AD^2}$, das ist $\sqrt{AC} = AD$. Also wäre die Linie AD die Quadratwurzel aus der AC.

Hierdurch ist man im Stande aus einer gegebenen unvollkommenen Quadratzahl die Wurzel vollkommen zu finden, aber nur geometrisch durch Linien. Es sey z. B. aus 5 die Wurzel zu ziehen; so nehme man vom Maaßstabe eine Linie BA = 1, und AC = 5, und theile BC in zween gleiche Theile. Hierauf beschreibe man aus dem Mittelpunkte einen halben Cirkel, und richte aus A die senkrechte AD auf. Es wird dieses die Wurzel aus AC = 5 seyn. Denn da $BA \times AC = AD^2$ ist, und BA = 1, AC = 5 genommen worden; so hat man $1 \times 5 = AD^2$ oder $5 = AD^2$, folglich beiderseits die

Wurzel ausgezogen $\sqrt{5} = AD$. Die Geometrie leistet hier etwas, dazu die Arithmetik nicht vermögend war. Nämlich, wie Hr. Hofr. Kästner bey einem ähnlichen Fall bemerkt; so suchte die Arithmetik die Theile des ganzen nur nach und nach, und konnte sie niemals alle finden, weil ihre Menge unendlich war; die Geometrie konnte es aber leisten, da sie das Ganze auf einmal darstellet, oder seine Gränzen bestimmet.

§. 200. Anm. Der Raum und Endzweck dieser Anfangsgründe verstatten nicht, daß weitere Anwendungen von den bisherigen Sätzen beygebracht werden. Hr. von Segner sagt bey dieser Gelegenheit: " Es werden unendlich viele Aufgaben durch dergleichen Proportionallinien aufgelöset — Sie werden aber von andern ganz anders gefunden, und auch diese allgemeine Aufgaben so vorgetragen, daß es schwer einzusehen ist, daß es eben diese sind.,,

§. 201. Aufg. Den Innhalt des Abschnitts ADBEA aus der gegebenen Sehne des Bogens BA, und seiner Höhe DE (Fig. 104.) zu finden.

Aufl. Man suche zuerst den Durchmesser des Kreises nach §. 197., und beschreibe aus seinem Mittelpunkt einen Kreis, darein man die Sehne AB trägt. Allsdann kann man den Winkel ACB

messen.

messen. Vermittelst dieses kann man nun den Innhalt des Ausschnitts ACBDA nach §. 169. berechnen. Aus AB und der Höhe CE läßt sich aber das Dreyeck ACB berechnen. Nämlich DF ist bekannt, folglich auch DC; wenn man nun die gegebene DE von DC abziehet; so bleibt EC übrig. AB ist aber ohne das schon gegeben. Wenn man nun endlich den Innhalt des Dreyecks ACB vom Innhalte des Ausschnitts ACBDA abziehet, so bleibt der Abschnitt ADBEA übrig.

Ex. Aus Wolfs Geometr. In der Rechnung werden alle Brüche weggelassen. Es sey AB = 600''', DE = 80''', so ist (§. 197.) DE : EB, und 80 : 300 = 300 : $\frac{300 \times 300}{80}$ = 1125'''. Es ist also EB × ED = DF, oder 1125. + 80 = 1205. Nun könnte man DF halbiren, und einen Kreis beschreiben, die Sehne AB hineintragen, und den Winkel ACB messen. Es sey ACB oder der Bogen AB = 60°, so müßte jetzt der Innhalt des Ausschnitts gefunden werden. Der Bogen AB = 60° muß, wie schon vorher bekannt ist, im Längenmaaß gesucht werden. Was die Peripherie des Kreises im Längenmaaß hält, findet sich durch die Proportion, 100 : 314 = 1205''': $\frac{1205 \times 315}{100}$ = 3783''', mit Hinweglassung des Bruchs $\frac{70}{100}$. Nun findet man den Bogen 60° im Längenmaaß, wenn man setzt: 360° geben 3783''', was 60°; und da findet man 630''', dieses mit der

halben Höhe DC, oder mit dem vierten Theil des Diameters DF multiplicirt, giebt den Ausschnitt. $630''' \times 301''' = 189630''' =$ ACBDA. Da nun $EF = 1205'''$; so ist $DC = 602$. Hiermit $DC - DE = EC$, oder $602''' - 80''' = 522'''$. Folglich EC mit der halben Grundlinie AB multiplicirt, giebt den Innhalt des Dreyecks ACB. $522 + 300 = 156600'''$. Zieht man den Innhalt des Dreyecks vom Innhalte des Ausschnitts ab; so bleibt für den Abschnitt übrig $33030'''$.

VI. Abschnitt.

Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde oder von der praktischen Geometrie.

§. 202. Anm. Einige der berühmtesten neuern lassen nach dem Beyspiele der Alten diese Anwendung der Geometrie mit Recht aus ihren Lehrbüchern weg. Man höre die Gründe von einem Manne, den jeder als einen competirenden Richter und Kenner der Sachen annehmen muß. Einer unsrer größten Geometern Hr. von Segner in der Vorrede zu seinen Anfangsgründen schreibt: " Die Feldmeßkunst, welche ich schon ehedem von der Geometrie abgesondert hatte, damit ich den ausgebreiteten Nutzen dieser Wissen-

schaft

schaft nicht auf einen einzigen Theil einzuschränken scheinen möchte, habe ich hier ganz weggelassen; und wie ich glaube, der Feldmeßkunst mehr zum Vortheil, als zum Schaden. Denn es kann niemand dasjenige, was gemeiniglich die praktische Geometrie genannt wird, vollkommen begreifen, wenn er gleich die Anfangsgründe der Geometrie gründlich erlernet hat, so lange er in der Mechanik, Optik, und Astronomie ein Fremdling ist; weil die Feldmesser aus allen diesen Theilen der Mathematik ihre Instrumente, oder andere Hilfsmittel ihrer Arbeit hernehmen müssen.„ Ein gewöhnlicher Feldmesser, welcher auf dem Felde gemessen hat, und wenn sich nachgehends die Figur nicht schließt; so lange zerrt, bis sich die Linien schließen, wird freilich schwer davon zu überzeugen seyn, daß nur Kenntnisse der Analysis, der Trigonometrie, und vieler Theile der angewandten Mathematik einen in den Stand setzen, richtig zu messen. Doch ist es gewiß; und nur die Ungeduld der Anfänger, welche von dem Gelernten gerne gleich den Nutzen sehen möchten, bewegt die Geometern, daß sie von den bisher erklärten Sätzen einige Anwendung, so gut es möglich ist, zeigen.

Einige Schriften, welche in der ausübenden Geometrie zu Grunde gelegt werden müssen, sind: Roger Cotesius de aestimatione errorum in mathesi mixta. Marinoni de re ichnographica. Boguer de

la figure de la terre. Kästner von den Fehlern bey der praktischen Geometrie, in den Abhandlungen der königl. schwedisch. Akad. der Wissenschaften. 1753. Eben desselben weitere Ausführung der astronomischen Anfangsgründe, u. s. w., die aber Kenntnisse erfodern, welche bey keinem Anfänger können gesucht werden.

Es kann also hier keine ausführliche Abhandlung über die Feldmeßkunst statt finden. Eben so wenig kann man sich auf eine ausführliche und genaue Beschreibung der Instrumente, welche gebraucht werden, einlassen. Es würden dazu viele Zeichnungen nöthig seyn, und ein Anfänger würde doch ihren Gebrauch nicht sehen, und überhaupt keinen deutlichen Begrif durch eine blosse Zeichnung erhalten. Das beste ist, daß man sie ihm selbst vorzeigt. Die gewöhnlichsten, womit die Arbeiten auf dem Felde verrichtet werden, sind das Meßtischgen, und der Winkelmesser (astrolabium).

Durch senkrecht eingesteckte Stäbe pflegt man sich auf dem Felde die Punkte vorzustellen, wenn nicht schon ohnedas an dem Orte, wo das Ende einer Linie seyn soll, ein anders Merkmal z. E. ein Stein, Baum u. dergl. ist. Eine gerade Linie wird auf dem Felde durch solche zween senkrecht eingesteckte Stäbe bestimmet, die man an die Endpunkte

te der Linie setzt. Ist aber die Linie lang, so setzt man auch zwischen die beiden vorigen in die Mitte noch andere Stäbe. Um zu untersuchen, ob die Stäbe alle in der geraden Linie stehen, darf man nur von dem äußersten Stabe gegen die andere zusehen, und acht geben, ob alle andere Stäbe dadurch verdeckt werden.

Eine solche gerade Linie unmittelbar zu messen, dienet die Meßkette, welche in Ruthen und Schuhe eingetheilet ist. Eine Stange, oder Schnur kann auch statt der Meßkette gebraucht werden. Doch müssen solche Schnuren vorher im Leinöl gesotten, und durch und durch mit Wachs getränket seyn; weil sie sonst von der Feuchtigkeit der Luft viel kürzer, und von der Trockenheit derselben viel länger werden. Schwenter Geom. pract. L. 1. merkt an, daß eine Schnur von 16 Schuhen ohne diese Vorbereitung innerhalb einer Stunde, fast um einen ganzen Schuh eingegangen sey. Von andern Cautelen, die bey Längenmassungen zu beobachten sind, handelt Penther in Praxi Geometr.

Wenn man eine Linie nicht unmittelbar messen kann; so wird die Ausmessung dadurch bewerkstelliget, daß man diese gerade Linie, als die Seite eines Dreyecks ansiehet, und von dem Dreyecke so viel

zu finden sucht, als hinlänglich ist, ein gleiches oder ähnliches Dreyeck zu construiren.

§. 203. Erkl. Ein Feld aufnehmen, oder in Grund legen, heißt, wenn man auf dem Papiere die Figur so im Kleinen zeichnet, daß sie der Größern auf dem Felde ähnlich ist.

§. 204. Aufg. Vermittelst einer Meßkette oder Schnur einen Winkel auf dem Felde an jeden andern Punkt einer gegebenen Linie zu tragen.

Auflös. Es sey (Fig. 105.) ACB der Winkel auf dem Felde, und gesetzt, man wollte ihn an den Punkt m der Linie mg setzen, so messe man auf den beiden Schenkeln des Winkels ACB zwey willkührliche Stücke, z. E. CF, CG und auch FG. Nun mache man vermittelst der Meßkette mf = CF, mg = CG und fg = FG; so ist das Dreyeck mfg = CFG und der Winkel m = C.

§. 205. Erkl. Verjüngen heißt in der ausübenden Geometrie eine kleine Linie oder Figur einer größern Linie oder Figur ähnlich machen.

§. 206. Aufg. Einen verjüngten Maaßstab zu verfertigen.

Aufl. Man trage auf eine unbestimmte Linie (Fig. 106.) zehn beliebige gleiche Theile. Ein solcher Theil sey Ab, daß also AB zehn solcher Theile, wie Ab enthält. Die Linie AB trage man so oft auf die AD, als es angehet. Man thut aber wohl, wenn man AB auf AD zehnmal trägt. Auf den Endpunkten A, B, C, D errichte man senkrechte Linien von unbestimmter Länge. Auf eine dieser senkrechten z. E. AF trägt man wieder zehn gleiche willkührliche Theile. Durch die Theilungspunkte c, d, e, f, ꝛc. ziehe man Parallelen mit AD. Die FG theile man in 10 solche Theile, die den Theilen der AB gleich sind. Endlich ziehe man die Querlinie hB, und so fort bis Fb.

Nimmt man nun AB für eine Ruthe an, so wird AB = bx ein Schuh, und mn ein Zoll, pq zween Zoll, u. s. f.

Wollte man z. E. 1° 4′ 5″ vom Maaßstabe nehmen; so müßte man den Cirkel in C setzen, und bis r aufthun; so hätte man 1° 4′. Um aber die Zoll noch zu bekommen, müßte man mit dem Cirkel bis in 5 hinaufrücken.

Bew. Da AB in 10 gleiche Theile getheilet worden; so folgt von selbst, daß jeder Theil wie Ab, bk ein Schuh sey, wenn AB eine Ruthe ist. Daß

aber

aber mn ein Zoll sey, wird so gezeigt: mn ist parallel mit BG, und es verhält sich derohalben (§. 178.) Bn : nm = BG : hg, oder permutando Bn : BG = nm : hg. Nun ist Bn : BG = 1 : 10 vermöge der Construction: also auch nm : hg = 1 : 10. Da aber hg ein Schuh, und nm nach dem erwiesenen der 10te Theil davon, so ist nm ein Zoll.

Aus diesem sieht man, daß pq zween Zoll u. s. w. sey. Wenn der Maaßstab nach dem Duodecimalmaaß eingerichtet würde, so bekäme AB 12 gleiche Theile; wie jeder von selbst sieht. In der Fortification bekommen diese Maaßstäbe ein etwas anders Ansehen; es beruhet aber ihre Einrichtung ebenfalls auf diesen Lehren. Auch zu astronomischen Zeichnungen werden dergleichen Maaßstäbe gebraucht.

Endlich, wenn man AB zehnmal an einander setzt, und die ganze Linie eine Ruthe bedeuten läßt; so wird jeder Theil wie AB ein Schuh. Jeder 10te Theil von AB, wie z. B. Ab ein Zoll, und mn eine Linie.

§. 207. Aufg. Die Entfernung zweyer Oerter A und B (Fig. 107.) zu messen, zu denen beiden man aus einem dritten Orte C in gerader Linie gehen kann.

Aufl.

Aufl. Die Aufgabe kann auf verschiedene Art aufgelöset werden. 1.) Vermittelst der Meßkette und Stäbe; und dann wird so verfahren. Man steckt in den genommenen dritten Ort C einen Stab, und trägt mit der Meßkette AC zurück gegen F, so daß AC = CF wird, und beide nur eine gerade Linie ausmachen. Eben dieses geschieht mit BC. Man macht nämlich BC = GC und legt sie, daß sie eine gerade Linie ausmachen. Man steckt in F und G Stäbe. Mißt man nun GF, so weiß man auch AB.

Bew. Denn da der Winkel ACB = GCF, weil sie vertikal sind; und BC = CG; CA = CF; so ist das Dreyeck ACF = GCF, und AB = GF.

Oft erlaubt es eine andere Verhinderung nicht, daß man AC und CB ganz zurück trage. Alsdann nehme man nur die Hälfte von AC, und CB, den dritten, vierten und jeden beliebigen Theil, und trage ihn zurück. Ist aber Cg die Hälfte, und cf die Hälfte von AC; so ist auch gf nur die Hälfte von AB.

Bew. Denn es ist vermöge der Construction CF : AC = 1 : 2; gC : CB = 1 : 2. Also Cf : AC = gC : CB, oder Cf : gC = AC : CB. Da auch der Winkel gCf = ACB, weil es Verticalwinkel sind, so ist das Dreyeck gCf ∽ ACB (§. 182.),

und

und gC : gf = CB : BA, oder gC : CB = gf : BA. Da nun gC : CB = 1 : 2; so ist auch gf : BA = 1 : 2. Auf eben diese Weise zeiget man, daß, wenn gC der dritte, vierte rc. Theil von CB ist, alsdann auch gf der dritte, vierte rc. Theil von BA seyn müsse.

Hat man aber 2.) einen Winkelmesser, so mißt man aus einem dritten angenommenen Standpunkt wie C ist, den Winkel ACB damit; mit der Meßkette aber die Linien CA, CB auf dem Felde. Hernach trägt man durch Hilfe des Transporteurs den Winkel ACB aufs Papier, und macht (Fig. 108.) acb = ACB. Den Schenkeln des Winkels ca, cb giebt man nach dem verjüngten Maaßstabe eben so viele Theile, als CA, CB nach dem eigentlichen Maaße haben. Man ziehet alsdann ab, und wenn man diese auf dem verjüngten Maaßstabe mißt; so enthält dieselbe eben so viel Ruthen, Schuhe rc auf dem Maaßstabe, als AB die zu messende Entfernung wirklich hat.

Bew. Die Linien ab, bc enthalten nach dem verjüngten Maaßstabe so viele Theile, als AB, BC nach dem wirklichen Maaße haben. Es ist also ac : bc = AC : BC. Da aber auch acb = ACB ist gemacht worden, so ist das Dreyeck acb ∽ ACB (§. cit.), und ac : ab = AC : AB, oder ac : AC = ab :

= ab : AB. Nun verhält sich a c : AC, daß ac nach dem verjüngten Maaßstabe so viele Theile bekommen hat, als AC nach dem großen Maaße hat. Es muß derohalben auch ab so vieles im verjüngten Maaße enthalten, als AB nach dem größern Maaße.

Gebraucht man 3.) das Meßtischgen, so bekömmt man die Figur gleich aufs Papier, und man kann des Transporteurs dabey entbehren. Man richtet nämlich das Diopternlinial nach A und B, und ziehet jedesmal auf dem Meßtischgen längst dem Linial eine gerade Linie, so erhält man einen Winkel auf dem Tischgen, der dem Winkel ACB auf dem Felde gleich ist, denn er deckt ihn. Macht man nun, wie vorher, die Schenkel dieses Winkels nach dem verjüngten Maaßstabe so groß, als AC, CB wirklich gemessen werden; so bekömmt man wieder eine Linie ab auf dem Tischgen, welche die zu messende Entfernung beider Oerter vorstellet, und nach dem verjüngten Maaßstabe so viel enthält, als AB auf dem Felde wirklich hat, wie aus dem Beweis Nr. 2. klar ist.

§. 208. Aufg. Die Entfernung zweyer Oerter A und B (Fig. 109.) zu messen, zu deren einen A man nur kommen kann.

Aufl. 1.) Vermittelst der Stäbe und der Meßkette.

kette. Man wähle sich einen Punkt, woraus man nach A kommen kann, und stecke einen Stab in C. Hat man nun AC gemessen; so trage man dieselbe nach eben der Richtung zurück, so daß AC = CD werde. Den Winkel A trage man nach §. 204 an den Punkt D, aber in entgegen gesetzter Richtung von A. In dem Schenkel DE gehe man so lange zurück, bis der Ort B, der Stab C und der Stab E eine gerade Linie ausmachen. Nachdem man in E einen Stab gesteckt; so messe man DE; sie wird so groß als AB die zu messende Weite seyn.

Bew. Nach der Construction ist AC = CD und der Winkel BAC = CDE. Da noch überdas ACB = ECD, weil es Verticalwinkel sind, so ist das Dreyeck ABC = ECD und AB = ED. Es ist auch hier nicht schlechterdings nöthig, daß die ganze AC zurück getragen werde. Es würde aber, wie sich aus §. 207 zeigt, ECD ein ähnliches Dreyeck entstehen, wenn man nur einen Theil von AC zurück trägt.

2.) Vermittelst des Astrolabiums. Man messe mit der Kette die Linie AC, und mit dem Astrolabium die Winkel ACB, und CAB. Hierauf ziehe man auf dem Papier eine Linie ac (Fig. 108.), die nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als AC auf dem Felde gefunden worden. An die beiden Endpunkte der Linie setze man mit dem Transporteur die

Win-

Winkel acb, cab, die den gemessenen Winkeln ACB, CAB gleich sind. Man verlängere die Schenkel der Winkel acb, cab, bis sie sich durchschneiden; und messe ab auf dem verjüngten Maaßstabe. Diese enthält so viel Ruthen, Schuhe, als AB im Großen auf dem Felde hat.

Bew. Da acb = ACB, und cab = CAB gemacht worden, so ist das Dreyeck acb ∽ ACB (§. 180.), und ac : ab = AC : AB; oder ac : AC = ab : AB. Da nun ac nach dem verjüngten Maaßstabe so groß, als AC auf dem Felde gemacht ist; so muß auch ab nach dem verjüngten Maaßstabe so viel als AB auf dem Felde enthalten.

3) Mit dem Meßtischgen. Man setze das Meßtischgen über den Punkt, und richte das Diopternlinial nach A und B; so bekömmt man den Winkel ACB auf dem Tischgen. Man messe CA auf dem Felde, und mache den Schenkel dieses Winkels auf dem Tischgen eben so groß nach dem verjüngten Maaßstabe. Hierauf trage man das Tischgen nach A, und stelle es so, daß der Punkt a auf dem Tischgen über A, und die linie ac auf dem Tischgen über AC stehet. Man richte das Diopternlinial nach B; so kann man auf dem Tischgen einen Winkel a zeichnen, der dem A gleich ist. Hiedurch erhält man nun wieder ein Dreyeck acb auf dem Tischgen, das dem ACB gleich ist.

§. 209. Aufg. Die Entfernung zweyer Oerter A und B (fig. 110.) zu messen, zu deren keinem man kommen kann.

Aufl. Vermittelst des Astrolabiums. Man erwähle sich zween Standpunkte C und D, deren Entfernung von einander sich unmittelbar messen läßt, und aus welchen beiden man die Oerter A und B sehen kann. In C und D stecke man Stäbe, und stelle sich auf dem Felde die Linie AC, CB, DA, DB vor. Man messe mit der Kette die Entfernung der beiden Stäbe von einander, nämlich die Linie CD, hernach mit dem Winkelmesser aus C die Winkel m, n, und aus D die Winkel x, y. Nun ziehe man auf dem Papiere eine Linie cd, und mache selbige nach dem verjüngten Maaßstabe so groß, als CD gemessen worden. Durch Hilfe des Transporteurs setze man an c die auf dem Felde gemessenen Winkel m, n, uud an d die gemessenen Winkel x, y. Die Schenkel ac, ad, cb, db verlängere man, bis sie sich durchschneiden; so geben die beiden Durchschnittspunkte a und b nach dem verjüngten Maaßstabe die Entfernung, welche die Orte A und B auf dem Felde haben.

Bew. Es ist 1) der Winkel acd = ACD, und cda = CDA; also das Dreyeck acd ∽ ACD (§. 180.). Folglich cd : ca = CD : CA; oder cd : CD = ca : CA. Es ist wieder 2) cdb = CDB, bcd = BCD,

BCD, und das Dreyeck bcd ∽ BCD (§. 180.). Also cd : cb = CD : CB; oder cd : CD = cb : CB. Da also nach Nr. 1. cd : CD = ca : CA, und nach Nr. 2. cd : CD = cb : CB, so ist ca : CA = cb : CB; oder ca : cb = CA : CB. Da nun auch der Winkel acb = ACB; so ist das Dreyeck acb ∽ ACB (§. 182.) und also ac : ab = AC : AB; oder ac : AC = ab : AB. Es war aber cd : CD = ac : AC, wie Nr. 1. erwiesen. Folglich cd : CD = ab : AB. Nun ist cd nach dem verjüngten Maaßstabe so groß gemacht worden, als DC nach dem wahren Maaße gefunden worden; folglich muß auch ab so viel nach dem verjüngten Maaße enthalten, als AB nach dem eigentlichen enthält.

§. 210. Anm. Mit dem Meßtischgen kann diese Aufgabe auch aufgelöset werden. Einem etwas aufmerksamen Anfänger zeigt sich aus dem vorhergehenden die Auflösung von selbst. Sowohl aber bey der Aufgabe §. 206. als 207. muß das Instrument an zwey verschiedene Orte gesetzt werden. Dadurch begehet man leicht einen Fehler. Es haben daher einige von denen, welche die praktische Geometrie treiben, auf Instrumente gesonnen, womit man die genannten Arbeiten aus einem Standpunkte verrichten könne. Aber auch schon die gewöhnlichen Instrumente können zu diesem Endzwecke gebraucht werden. Man sehe Schwenters Geom. pract. Ingleichen

Ehrenbergers drey zu Koburg herausgegebene Programmata de nouis Problemmatibus geom. campestr. Hr. Hofr. Kästner, der diese Schriften anführt, sagt hierbey: " Es verdiente (das Feldmessen aus einem Stande) gebräuchlicher zu seyn, als es ist, da die mehrere Mühe die es mit Messung der Linien erfodert, dadurch vergolten wird, daß die Fortsetzung des Tischgens vermieden wird, welches man nicht allemal richtig genug wieder in seine gehörige Lage bringt." Die engen Gränzen dieser Abhandlung verstatten nicht, daß die Methoden hier angeführt werden. Hr. Prof. Clemm im mathematischen Lehrbuche §. 853. wendet die Trigonometrie auf diese Messungen aus einem Standpunkte an.

Außer dem Winkelmesser und Meßtischgen brauchen oft die Feldmesser noch andere Instrumente, die man in Büchern, welche von der praktischen Geometrie handeln, beschrieben findet. Man sehe Penthers praxis geometr. Auch werden Instrumente angegeben, wodurch man alle Aufgaben aufzulösen im Stande seyn soll. S. des Pater Mayers zu Manheim seine Schrift Pantometrum Pacecciaum.

VII. Abschnitt.

Von Messung und Aufnehmen einer Gegend oder Fläche.

§. 211. Aufg. Ein Feld, oder einen andern Platz wo man überall nach geraden Linien gehen kann, in Grund zu legen.

Aufl. Es stelle ABCDE (fig. 111.) das zumessende Feld vor. Man kann es 1) bloß durch die Kette und Stäbe ausmessen. Wenn man nämlich alle Linien des Umfangs AB, BC, CD, DE, EA, und die Diagonalen AC, AD mißt; so kann man durch Hilfe des verjüngten Maaßstabes die Dreyecke abc, acd, ade zusammensetzen, die den Dreyecken ABC: ACD, ADE ähnlich sind. Man muß nur beobachten, daß man bey Zeichnung der Figur die Linien ab, bc, u. s. w. in der Ordnung auf einander folgen läßt, wie sie auf dem Felde auf einander folgen.

Wenn man 2) den Winkelmesser gebraucht, so erwähle man sich innerhalb des Feldes (fig. 112.) einen beliebigen Standpunkt F, und messe die Winkel AFB, BFC, CFD, DFE, EFA; ingleichen mit der Meßkette die Linien AF, BF, CF, DF, EF. Vermittelst des Transporteurs trage man an einen Punkt f die gemessenen Winkel, und mache die Schen-

kel der Winkel nach dem verjüngten Maaßstabe so groß, als solche gemessen worden sind; so wird die ganze Figur abcde der auf dem Felde ähnlich seyn.

Bew. Da af : fb = AF : FB, und der Winkel afb = AFB gemacht worden, so ist das Dreyeck afb ∽ AFB (§. 182.). Also ist fb : ba = FB : BA, und m = o. Eben so erhellet, daß das Dreyeck fbc ∽ FBC sey, und folglich wieder fb : bc = FB : BC, und n = x. Da nun, wenn gleiches zu gleichem addirt wird m + n = o + x, oder der Winkel abc = ABC wird; und da dieses von allen Winkeln dieser Figuren gezeigt werden kann; auch überdas die Seiten, welche diese gleichen Winkel einschließen proportional sind; so ist die Figur abcde ∽ ABCDE (§. 174.)

§. 212. Aufg. Ein Feld oder Platz, in welchen man nicht kommen kann, in Grund zu legen (fig. 113.).

Aufl. Man setze, daß man ganz um das Feld herumgehen könne; so messe man mit der Kette alle Linien AB, BC, CD, DE, EF, und mit dem Winkelmesser die Winkel A, B, C, &c. Vermittelst des verjüngten Maaßstabes und des Transporteurs construire man eine Figur abcde, die der gemessenen ähnlich sey. Man muß nämlich mit dem Transpor-

porteur einen Winkel bae auf dem Papier zeichnen, der dem gemessenen BAE gleich ist, die Schenkel ba, ae des Winkels mache man nach den verjüngten Maaßstabe so groß, als BA, AE gemessen worden, u. s. w.

Wenn man aber nicht um das ganze Feld herumgehen kann; so erwähle man sich zween Standpunkte, aus welchen man das ganze Feld übersehen kann; und deren Entfernung von einander sich unmittelbar messen läßt. Es mögen (fig. 113.) A und E diese zween Standpunkte seyn. Nachdem man AE mit der Kette ausgemessen hat, so messe man auch mit dem Winkelmesser aus A die Winkel x, u, o, und aus E die Winkel y, m, n. Hierauf ziehe man auf dem Papier eine Linie ae, welche nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als die gemessene AE. An den Endpunkt a trage man die gemessenen Winkel x, u, o mit dem Transporteur, und an den Punkt e die Winkel y, m, n. Man verlängere die Schenkel der Winkel, bis sie sich durchschneiden, und hänge die Durchschnittspunkte d, c, b durch gerade Linien an einander, so muß die Figur abcde der auf dem Felde, die hier durch ABCDE vorgestellet wird, ähnlich seyn.

Bew. 1) Es ist der Winkel bae = BAE, und aeb = AEB. Also das Dreyeck aeb ∽ AEB (§. 180.) und ae : ab = AE : AB, oder ae : AE =

ab : AB. 2) Ferner ist der Winkel cae = CAE, aec = AEC; folglich wieder das Dreyeck cae ∽ CAE, und ae : ac = AE : AC (§. 180.); oder ae : AE = ac : AC. 3) Endlich ist der Winkel dae = DAE, aed = AED. Und das Dreyeck dae ∽ DAE (§. 180.) Also ae : ed = AE : ED, oder ae : AE = ed : ED. Da also nach Nr. 1. ae : AE = ab : AB, und nach Nr. 2. ae : AE = ac : AC, so ist ab : AB = ac : AC, oder ab : ac = AB : AC; da nun auch der Winkel bac = BAC, so ist das Dreyeck abc ∽ ABC, und ab : bc = AB : BC (§. 182.). Ingleichen der Winkel abc = ABC, und der Winkel acb = ACB.

Daß auch cd : de = CD : DE sey, wird so erwiesen. Da schon Nr. 2. gezeigt worden, daß das Dreyeck ace ∽ ACE; so ist ae : ec = AE : EC, oder ae : AE = ec : EC. Es ist aber ae : AE = ed : ED nach Nr. 3. Also ec : EC = ed : ED, oder ec : ed = EC : ED. Da auch der Winkel ced = CED; so ist wieder das Dreyeck ced ∽ CED (§. 182.), und cd : de = CD : DE. Auch der Winkel cde = CDE, und der Winkel ecd = ECD. Da nun ebenfalls eca = ECA, weil nämlich nach dem vorhergehenden das Dreyeck eca ∽ ECA, und den Winkel acb = ACB; so ist, wenn man gleiches zu gleichem addirt, der Winkel ecd + eca + acb = ECD + ECA + ACB, oder der Winkel bcd = BCD.

Da

Da also vermöge des bisher erwiesenen alle Winkel in beiden Figuren gleich, und die Seiten, welche diese Winkel einschliessen, in beiden einerley Verhältniß haben; so ist die Aehnlichkeit beider Figuren offenbar (§. 174.).

§. 213. Anm. Dieses sind die vornehmsten Aufgaben der Feldmeßkunst. Practische und handwerksmäßige Feldmesser geben eine Menge Vorschriften an, die dem Gedächtniß zur Last fallen; deren Erfindung ein Vergnügen für solche Geometer selbst seyn mag.

Wenn man ein Feld oder Platz in Grund gelegt hat; so läßt sich der Innhalt finden, wenn man die Figur durch die Diagonalen in Dreyecke zertheilet; der Dreyecke ihren Innhalt nach den schon bekannten Regeln ausrechnet, und den Innhalt aller Dreyecke zusammenaddirt.

Die Theilung der Figuren läßt sich in diesen Anfangsgründen um so weniger lehren; da man wegen der mancherley Gestalten keine allgemeine Regeln hat; und besondere Fälle öfters Lehren voraussetzen, die hier nicht haben beygebracht werden können. Bey praktischen Schriftstellern trifft man Vorschriften zu solchen Theilungen ohne Beweis an. Hr. Hofr. Kästner gedenket in seiner Geometrie der Vorlesung, die der verdienstvolle Prof. Lowitz in der königl. götting. Gesellsch. der Wissensch. im Jahre 1757.

gehalten, und worinn er gezeigt hat, wie man solche Theilungen auf dem Felde unmittelbar bloß mit der Meßkette ohne Werkzeuge und Zeichnungen verrichten solle. Es sind aber hierzu algebraische Formeln nöthig.

VIII. Abschnitt.

Von Messen der Höhen.

§. 214. Aufg. Eine Höhe AB (fig. 112,) zu messen, zu der man in gerader Linie kommen kann, und welche auf dem Boden senkrecht stehet.

Aufl. Man wähle sich einen Standpunkt C und messe den Winkel ACB mit dem Winkelmesser, und die Linie BC mit der Kette. Hernach ziehe man auf dem Papier eine Linie bc, die nach dem verjüngten Maaßstabe so groß ist, als BC im Großen. An den Punkt c setze man mit dem Transporteur den gemessenen Winkel BCA, und richte aus b eine senkrechte ba auf, welche die ac durchschneidet. Wenn man nun ba auf dem Maaßstabe mißt; so kann man erfahren, wie groß AB sey.

Bew. Die Winkel B und b sind einander gleich, weil es rechte sind; überdas ist der Winkel C=c gemacht

macht worden; daher ist (§. 180.) das Dreyeck ABC ∽ abc, und bc : ba = BC : BA, oder bc : BC = ba : BA. Da aber bc nach dem verjüngten Maaßstabe so viel enthält, als BC im Großen; so muß auch ba so viel auf dem Maaßstabe enthalten, als BA im großen Maaße.

Da sich aber das Instrument, womit man die Winkel mißt, nicht unmittelbar auf die Erde setzen läßt; so muß dir Höhe desselben zu der gefundenen Höhe hinzuaddirt werden. Dieses ist überall in Acht zu zu nehmen.

§. 215. *Anm.* Noch auf andere Arten läßt sich diese Aufgabe auflösen. Z. E. wenn man (fig. 114.) einen Stab ab senkrecht einschlägt, und zu gleicher Zeit die Länge des Schattens vom Stab, und dem Körper mißt; so läßt sich die Höhe des Körpers durch die Regel de Tri finden; denn, wenn (fig. 114.) ab der Stab, und bc der Schatten desselben ist; BC aber der Schatten vom Körper AB; so ist bc : ba = BC : BA. Die drey ersten Glieder der Proportion können aber gemessen werden, und daher wird das vierte auch bekannt.

Ebenfalls könnte man den Stab ab so senkrecht in die Erde schlagen, daß das Auge bey C, die Spitze des Stabs a, und das oberste vom Körper A eine

gerade

gerade Linie ausmachen; und da würde wieder bC oder die Entfernung des Stabes vom Auge ba, oder die Höhe des Stabes, ingleichen BC, oder die Entfernung des Körpers vom Auge können gemessen, und nach vorgedachter Proportion BA auch gefunden werden.

§. 216. Aufg. Eine Höhe zu messen, mit welcher man sich auf einerley Ebene befindet, zu der man aber nicht in gerader Linie kommen kann. Z. E. es sey die Höhe AB (fig. 115.) zu messen.

Aufl. Man erwähle sich zween Standpunkte C und D, und messe mit dem Winkelmesser die Winkel BCA und BDA. Ingleichen mit der Meßkette die Entfernung beyder Standpunkte CD. Hierauf ziehe man eine unbestimmte Linie auf dem Papier, und mache cd nach dem verjüngten Maaßstabe so groß, als CD im großen Maaße gefunden worden. An den Punkt d setze man den gemessenen Winkel BDA mit dem Transporteur, und an den Punkt c den Winkel BCA, und ziehe ac und ad, bis sie sich durchschneiden. Aus det Spitze a lasse man das Perpendikel ab auf die unbestimmte Linie bd fallen; so giebt ab die Höhe des Thurmes, wenn man sie auf dem verjüngten Maaßstabe mißt.

Bew.

Bew. Es ist der Winkel BCA + ACD = bca + acd. Nun ist bca = BCA gemacht worden; also ist auch der Winkel ACD = acd. Da nun auch der Winkel CDA = cda gemacht worden, so sind die Dreyecke ACD, acd ähnlich (§. 180.), und CD: CA = cd : ca; oder CD : cd = CA : ca. Weil aber bey B und b rechte Winkel sind, und der Winkel BCA = bca durch die Construction ist; so ist wieder nach §. 180. das Dreyeck BCA ∽ bca, und also CA : AB = ca : ab; oder CA : ca = AB : ab. Es war aber vorher CD : cd = CA : ca, folglich CD : cd = AB : ab. Da nun cd nach dem verjüngten Maaßstabe so groß gemacht worden, als CD im wirklichen Maaße war; so muß auch ab auf dem verjüngten Maaßstabe so viel geben, als AB im großen Maaße enthält.

IX. Abschnitt.

Von den geometrischen Körpern, oder die Stereometrie.

§. 217. Erkl. Ein prismatischer Körper oder ein Prisma ist der körperliche Raum, welcher durch zwo gleiche und ähnliche Figuren, die einander parallel liegen, und durch so viele Parallelogramme eingeschlossen wird, als die Figur Seiten hat. Man

kann

kann sich die Enstehung eines Prisma dadurch vorstellen, wenn man sich eine ebene Fläche gedenket, die sich an einer geraden Linie immor parallel herunter beweget. Wenn sich z. E. das Dreyeck ABC (fig. 116.) an der Linie AD herunter bewegte, so würde ein Prisma beschrieben.

Die gleichen und ähnlichen Figuren, wie z. B. ABC, und DEF heißen die Grundflächen, und die Parallelogramme, welche den körperlichen Raum begränzen, wie ABDE, BECF, ACDF die Seitenflächen.

Wenn die Grundfläche eines Prisma drey Seiten hat; so heißt das Prisma ein Dreyeckichtes; hat die Grundfläche vier Seiten, so heißt das Prisma ein Viereckichtes u. s. w. Bekömmt endlich die Grundfläche unendliche viele, kleine Seiten, das ist, wird die Grundfläche ein Kreis, so heißt das Prisma ein Cylinder, oder eine Walze (fig. 117.)

Von den viereckichten Prismen ist noch zu bemerken: Ein Parallelipipedum ist ein viereckichtes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (fig. 118. Ein Cubus oder Würfel ist ein viereckichtes Prisma, dessen Grund = und Seitenflächen Quadrate sind (fig. 119.)

Noch

Noch werden die Prismen überhaupt in senkrechte oder gerade (prisma rectum) und in schiefe eingetheilt. Ein senkrechtes ist es, wenn die Seitenflächen auf den Grundflächen senkrecht stehen. Ein schiefes aber ist es, wenn die Seitenflächen schief aus den Grundflächen stehen.

Die gerade Linie, welche im Cylinder durch die Mittelpunkte der Grundflächen gezogen werden kann; wie FG (fig. 117.) heißt die Axe. Stehet diese Axe senkrecht auf der Grundfläche, so wird der Cylinder senkrecht genannt. Macht aber die Axe schiefe Winkel mit der Grundfläche, so wird ein schiefer Cylinder daraus, wie ABCD (fig. 120.).

§. 218. **Erkl.** Durch die Höhe des Prisma wird die gerade senkrechte Linie verstanden, die man von der einen Grundfläche auf die gegenüberstehende ziehen kann. Bey den senkrchten Prismen ist die Höhe einerley mit denjenigen Seiten der Seitenflächen, welche die gegenüberstehende Ecken der Grundflächen verbinden, wie z. E. AD (fig. 116.). Im senkrechten Cylinder giebt die Axe die Höhe ab.

§. 219. **Anm.** Man findet oft die Erklärung vom Cylinder, daß er entstehe, wenn sich ein Rechteck um eine unbewegliche Seite desselben drehet. Diese Erklärung wäre aber nur vom senkrechten Cylinder zu verstehen: von einem schiefen kann es nicht gesagt werden, daß er so entstehe.

§. 220.

§. 220. Zus. Wenn ein Prisma nach einer ebenen Fläche mit der Grundfläche parallel geschnitten wird; so ist die Figur des Durchschnitts den Grundflächen gleich und ähnlich. Im Cylinder erhielte man lauter gleiche Kreise, wenn man den Cylinder parallel mit der Grundfläche durchschneidet.

§. 221. Lehrs. Prismata und Cylinder sind einander gleich, wenn sie gleiche Grundflächen und Höhen haben.

Bew. Denn, wenn man solche prismatische Körper, die gleiche Grundflächen haben, durch eine Ebene schneidet; so kommen überall gleiche durchschnitte hervor (§. 220.). Da aber auch die Höhe in beiden Körpern gleich ist; so können dieser Durchschnitte gleich viel gemacht werden; daher sind die Körper selbst einander gleich.

§. 222. Zus. Da ein Dreyeck so groß als ein Viereck oder Fünfeck u. s. w. seyn kann; so kann auch ein dreyeckichtes Prisma, einem viereckichten, fünfeckichten u. s. w. gleich seyn, wenn die Grundfläche des dreyeckichten, der Grundfiäche der viereckichten gleich ist, und beide einerley Höhe haben.

§. 223. Erkl. Wenn an die Spitzen aller Winkel einer ebenen geradelinichten Figur ABCD (Fig.

121.)

121.) von einem Punkte F, welcher außerhalb der Ebene liegt, gerade Linien FA, FB, FC, FD gezogen werden; so heißt der Körper, welcher durch die ebene Figur ABCD und durch die Seitenflächen begränzet wird, eine Pyramide. ABCD ist die Grundfläche, und die Dreyecke FAB, FBC, FDC, FAD die Seitenflächen. Der Punkt F, worin die Dreyecke zusammenstossen, ist die Spitze. Die gerade Linie, welche aus der Spitze senkrecht auf die Grundfläche gezogen wird, ist die Höhe.

Die Pyramiden werden nach der Anzahl der Seiten, welche die Grundfläche hat, von einander unterschieden. Wäre also die Grundfläche ein Dreyeck, so heißt die Pyramide dreyeckicht; wäre die Grundfläche ein Viereck, so heißt die Pyramide viereckicht u. s. w.

Eine Pyramide, deren Grundfläche und Seitenflächen gleichseitige Dreyecke sind, heißt ein Tetrandrum (Fig. 122.). Wenn die Grundfläche einer Pyramide unendlich viele Seiten hat, das ist, wenn sie ein Kreis ist; so wird die Pyramide ein Kegel conus genannt (Fig. 123.)

Die gerade Linie, welche aus der Spitze des Kegels auf den Mittelpunkt der Grundfläche gezogen wird, heißt die Axe des Kegels, wie CD (Fig.

123 und 124.). Wenn die Axe senkrecht auf der Grundfläche stehet; so heißt auch der Kegel gerade oder senkrecht (Fig. 123.); und im andern Falle pflegt man ihn schief zu nennen (Fig. 124.). Ein senkrechter Kegel entstehet daher, wenn man ein rechtwinkelichtes Dreyeck um eine von den Seiten, welche den rechten Winkel einschließen, drehet.

§. 224. Lehrs. Wenn eine Pyramide ABCD (Fig. 123.) durch eine Ebene geschnitten wird; welche der Grundfläche parallel lauft; so ist der Durchschnitt abc der Grundfläche ABC ähnlich.

Bew. Weil die Pyramide so durchschnitten worden, daß der Schnitt abc mit der Grundfläche parallel ist; so ist auch bc parallel mit BC; cd mit CD, und bd mit BD. Also ist nach (§. 178.) Ab : AB = bc : BC, und Ab : AB = bd : BD. Folglich bc : BC = bd : BD, oder bc : bd = BC : BD. Eben so ist (§. 178.) Ad : AD = dc : DC, und Ad : AD = db : DB; also dc : DC = db : DB, oder dc : db = DC : DB. Da nun alle Seiten des Dreyecks abc sich so verhalten, wie die Seiten des Dreyecks ABC, so sind die Dreyecke einander ähnlich (§. 183.).

Vieleckichte Pyramiden können allemal in dreyeckichte zergliedert werden. Daher gilt der Beweis von allen Pyramiden.

§. 225. Zus. Wenn ein Kegel durch eine Ebene durchschnitten wird, welche seiner Grundfläche parallel lauft; so entstehet ein Cirkel. Je näher der Schnitt der Grundfläche ist, desto größer wird der Cirkel. Würde daher ein Kegel undenklich nahe bey der Grundfläche durchschnitten, so würde der Cirkel, welcher dadurch hervorgebracht würde, unendlich wenig; das heißt, gar nicht von der Grundfläche unterschieden seyn. Den Kegel könnte man sich aus diesem Grunde, als eine Menge von Cylindern vorstellen, deren Höhe unendlich klein ist. Es ist dieses wegen des folgenden wohl zu merken.

§. 226. Lehrs. Alle Pyramiden und Kegel, welche gleiche Grundflächen und Höhen haben, sind einander gleich.

Bew. Man setze die Pyramiden ABCD, EFGH (Fig. 126.) über gleiche und ähnliche Grundflächen, durchschneide sie parallel mit einer Ebene in einerley Höhe; so ist das Dreyeck bcd ∽ BCD, und das Dreyeck fgh ∽ FGH (§. 224.). Weil aber nach der Voraussetzung die Grundfläche FGH der BCD ähnlich und gleich ist, so ist auch fgh ∽ BCD; und bcd : BCD = fgh : BCD, oder bcd : fgh = BCD : BCD. Da nun BCD = BCD ist; so ist auch bcd = bcd = fgh. Solchergestalt zeigt sich, daß überall diese Durchschnitte gleich sind.

Da aber auch die Pyramiden gleiche Höhen haben; so können in der einen nicht mehr Durchschnitte, als in der andern gemacht werden. Daher sind sie einander gleich.

§. 227. Erkl. Wenn man einen halben Cirkel um seinen Diameter herumdrehet, bis er wieder in seine vorige Lage kömmt, ohne daß der Diameter seine Lage verändert; so entstehet durch diese Bewegung eine Kugel (Sphaera). Die Oberfläche der Kugel (Superficies sphaerae) ist die krumme Fläche, welche die Kugel begränzet. Der Mittelpunkt des Kreises, durch dessen Bewegung die Kugel entstehet, ist auch der Mittelpunkt der Kugel. Der Durchmesser des halben Kreises, durch dessen Herumdrehen die Kugel erzeugt wird, heißt die Axe der Kugel. Die zween äußersten Punkte an der Axe heißen die Pole der Kugel. In fig. 127 wäre also AB die Axe der Kugel, die Punkte A und B ihre Pole. Eine gerade Linie, welche aus der Oberfläche der Kugel in den Mittelpunkt gezogen wird, heißt der Halbmesser der Kugel.

§. 228. Zus. In einer Kugel sind alle Halbmesser und folglich auch alle Durchmesser einander gleich. Auch in zwoen gleichen Kugeln sind die Halbmesser gleich, ingleichen die Durchmesser.

§. 229. Erkl. Ein körperlicher Winkel, eine Ecke (angulus solidus) bestehet aus verschiedenen ebenen Winkeln, welche in einer Spitze zusammen stossen, und einen körperlichen Raum einschließen. Fig. 128 ist bey A eine solche Ecke.

§. 230. Anm. Jede Ecke in einem Zimmer macht einen körperlichen Winkel. Man hat zu einem solchen körperlichen Winkel wenigstens drey ebene Winkel nöthig. Die Summe aller dieser ebenen Winkel, welche den körperlichen ausmachen, müssen weniger als 360°, oder weniger als vier Rechte ausmachen, sonst fallen sie in eine Ebene, und machen keine Ecke aus.

§. 231. Erkl. Ordentliche Körper heißen solche, die in lauter ordentliche gleiche Flächen von einer Art, die gleiche Ecken machen, eingeschlossen sind. Alle übrige Körper, wo nur eins von diesen Stücken fehlet, heißen unordentliche oder irreguläre.

§. 232. Anm. Man hat nur fünf ordentliche Körper, die von den hedris oder Seiten, und der Anzahl derselben benennet werden. Nämlich 1.) der Würfel (hexaedrum cubus), der in 6 Quadrate eingeschlossen ist. 2.) Das Tetraedrum, das in vier, 3.) das Octaedrum, das in acht, 4.) das Icosaedrum, das in zwanzig ordentliche Dreyecke; das

ist gleichseitige Dreyecke eingeschlossen ist. Endlich 5.) das Dadecaedrum, das in zwölf ordentliche Fünfecke eingeschlossen ist.

Man pflegt auf einer Ebene, z. B. Pappe und Charten, die Seitenflächen geometrischer Körper zu zeichnen, so daß sie, wenn sie gehörig zusammengebogen werden, den Körper einschließen. Man nennt diese Seitenflächen Netze. Die Regeln dazu lassen sich, wie Kästner sagt, bey wirklicher Vorweisung leicht begreifen. Man findet eine Anweisung zur Verzeichnung der Netze in Wolfs Anfangsgründen der Geometrie am Ende.

Die ausführliche Lehre von den regulären Körpern setzt Gründe voraus, die in Anfangsgründen nicht Platz finden. Euklides, Hausen, Karsten u. a. tragen die Lehren davon vor.

§. 233. Erkl. Da das Maaß mit der gemessenen Sache von einer Art seyn muß; so nimmt man zur Ausmessung der Körper auch wieder einen Körper, und zwar einen Würfel, weil sich dadurch die Ausmessung am leichtesten bewerkstelligen läßt. Eine jede Seite von einem Quadrate, die den Würfel einschließt, heißt auch die Seite des Würfels (Latus cubi). Man benennet nun den Würfel von der Länge seiner Seite. Eine Cubikruthe wäre demnach

nach ein Würfel, dessen Seite, das ist Länge, Breite und Dicke eine Ruthe betragen würden. Ein Cubikschuh ein Würfel, dessen Seite ein Schuhe; ein Cubikzoll, ein Würfel, dessen Seite einen Zoll; eine Cubiklinie, ein Würfel, dessen Seite eine Linie lang wäre.

§. 234. Anm. Es ist hieraus von selbst offenbar, was eine Cubikelle, eine Cubikmeile, u. dergl. bedeuten. Vor die Zifern, wodurch das Cubikmaaß ausgedrückt wird, pflegt man einen kleinen Würfel zu setzen, oder den Buchstaben c rechter Hand oben an die Zahl, auch wohl linker Hand vor die Zahl.

Im gemeinen Leben wird der körperliche Raum nicht allemal durch Würfel ausgemessen; z. E. flüßige Materien, ingleichen Fruchthaufen werden durch cylindrische Gefässe insgemein ausgemessen.

§. 235. Aufg. Ein senkrechtes Parallepipedum auszumessen (Fig. 129.).

Aufl. Man messe mit einerley Maaße ein paar an einander liegende Seiten der Grundfläche AB, BC, ingleichen die Höhe AD. Das Product, welches herauskömmt, wenn man die Zahlen in einander multiplicirt, zeigt an, wie vielmal der Würfel von der Seite A a in dem Körper enthalten ist. Es

 sey

sey z. E. AB = 7, BC = 3, AD = 4; so ist 7 × 3 × 4 = 84.

Bew. So vielmal das Maaß Aa, in der Seite AB enthalten ist; so viel Würfel von dieser Größe können auch neben einander an AB gesetzt werden. In unserm Falle also 7. diese Reihe von Würfeln läßt sich so vielmal auf der Grundfläche wiederholen, so vielmal das Maaß Aa in BC enthalten ist. Man bekömmt dadurch eine Schichte oder Lage von Würfeln, die den Boden bedecken. Im übrigen Beyspiele könnte man die Reihe von 7 Würfeln dreymal aneinander legen; es haben also da 3 × 7 = 21 Würfel, die Aa zur Seite haben, Raum. Es ist aber auch ferner klar, daß sich dieser Schichten von Würfeln so viel über einander setzen lassen; so vielmal Aa oder das angenommene Maaß in AD oder der Höhe enthalten ist. Wenn man also diese Zahl, welche die Höhe ausdrücket, mit der Menge der Würfel, welche in einer Schichte Raum haben, multiplicirt; so stellet das Product die Menge aller Würfel dar, welche das Parallelepipedum enthält. Wenn man die obige Zahl 21, welche die Menge der Würfel in einer Schichte ausgedrückt hat, mit 4 multiplicirt, das hier die Höhe ist, so bekömmt man die Menge von allen Würfeln, die das Parallelepipedum enthält. Nennet man also die drey

Linien

Linien AB, BC, AD Länge, Breite und Höhe, so giebt ein Product aus ihnen den Innhalt.

§. 236. Zus. Da der Würfel ein senkrechtes Parallelepipedum ist, dessen Grund- und Seitenflächen Quadrate sind; so folgt daraus, daß man seinen Innhalt finde, wenn man eine Seite z. E. AB dreymal mit sich selbst multiplicirt, das ist, wenn man AB zur dritten Dignität erhebt. Und umgekehrt kann man aus dem gegebenen Innhalte eines Würfels seine Seite finden, wenn man aus dem Innhalte die Cubikwurzel ziehet. Z. E. in Fig. 130 ist AB = 3. Also 3 × 3 × 3 = 27. Wäre der Innhalt 27 gegeben; so fände man 3 für die Seite des Würfels; welche letztere Zahl die Cubikwurzel aus 27 ist.

§. 237. Zus. Aus dem vorhergehenden §. zeigt sich die Eintheilung des körperlichen Maaßes. Da im Decimalmaaße eine Längenruthe 10 Schuh hält; so hätte eine Cubikruthe 10 × 10 × 10 = 1000 Cu- Cubikschuhe, und so hat ein Cubikschuh 1000 Cubikzoll; ein Cubikzoll 1000 Cubiklinien.

Nimmt man aber im Längenmaaße das Duodecimalmaaß, daß nämlich eine Ruthe = 12 Schuh sey; so hält eine Cubikruthe 12 × 12 × 12 = 1728 Cubikschuh. Folglich ein Cubikschuh 1728 Cubikzoll, u. s. w.

 Wenn

Wenn man das Decimalmaaß gebraucht; so lassen sich niedrigere Cubikmaaße auf höhere bringen, wenn man immer drey Zifern abschneidet, und das Zeichen der nächst höhern Ordnung dabey schreibt. Z. E. 1258378225 Cubiklinien wären 1°258′378″225‴.

Bey zwölftheilichtem Maaße müßte man die gegebene Zahl durch die Division mit 1728 auf Zoll; die Zolle durch eben solche Division auf Schuhe, und die Schuhe wieder durch dergleichen auf Ruthen bringen.

Im Decimalmaaß kann ein höheres gegebenes Cubikmaaß in niedriges verwandelt werden, wenn man drey Nullen an das höhere setzt; z. B. 37 Cubikruthen wären 37°000′ = 37°000′000″.

Gebraucht man zwölftheilichtes, so müßte man ein gegebenes Cubikmaaß mit 1728 multipliciren, um es auf das nächst niedrige zu bringen.

§. 238. Lehrs. Ein Parallelepipedum kann in zwey gleiche dreyeckichte Prismata getheilet werden.

Bew. Man theile ein Parallelepipedum AFDB (Fig. 131.) durch eine ebene Fläche, daß der Schnitt durch die Diagonalen DF, HB in den Grundflächen gehet. Die zwey dreyeckichte Prismata DFHBEA

und

und DFHBEC, welche dadurch entstehen, haben einerley Höhe, und gleiche Grundflächen; weil nämlich die Dreyecke HBC, HBA einander gleich sind. Es sind also beide dreyeckichte Prismata von gleichem Innhalte (§. 221.).

§. 239. Zus. Da also ein dreyeckichtes Prisma die Hälfte von einem Parallelepipedum ist; der Innhalt des Parallelepipedums aber gefunden wird, wenn man den Innhalt der Grundfläche AHBC in die Höhe AE multiplicirt; so wird der Innhalt eines dreyeckichten Prisma gefunden, wenn man die Hälfte vom Innhalte der Grundfläche AHBC; das ist, wenn man den Innhalt des Dreyecks AHB in die Höhe AE multiplicirt. Es sey z. E. der Innhalt des Dreyecks AHB = 24′ und die Höhe AE = 10′; so ist der körperliche Innhalt des Prisma DHBFEA = 24′ × 10′ = 240′.

§. 240. Zus. Eben so wird der körperliche Innhalt eines jeden vieleckichten Prisma gefunden, wenn man den Innhalt seiner Grundfläche ausrechnet, und diesen mit der Höhe des Prisma multiplicirt. Es läßt sich nämlich jedes Vieleck durch Diagonalen in Dreyecke theilen; und wenn die Grundfläche eines vieleckichten Prisma solchergestalt getheilet würde; so erhielte man eine Anzahl dreyeckichter Prismen, die alle gleiche Höhe hätten. Wenn man also die

Summe dieser dreyeckichten Grundflächen, aus welchen das Vieleck bestehet, das heißt, wenn man den Innhalt der ganzen Grundfläche, welche das vieleckichte Prisma hat, in die Höhe desselben multiplicirt; so bekömmt man den körperlichen Innhalt desselben (§. 239.).

§. 241. Zus. Die Cylinder sind Prismen, welche Kreise zu Grundflächen haben (§. 217.). Folglich findet man auch des Cylinders Innhalt, wenn man den Innhalt seiner Grundfläche in die Höhe des Cylinders multiplicirt. Z. E. Es sey der Durchmesser der Grundfläche eines Cylinders = 560''; so ist die Peripherie des Kreises, der die Grundfläche des Cylinders ist, = 17584'''. Folglich der Innhalt der Grundfläche = 246176''. Wenn nun die Höhe des Cylinders = 892'' genommen wird; so ist sein körperlicher Innhalt = 219588992''.

§. 242. Lehrs. Eine dreyeckichte Pyramide ist der dritte Theil von einem dreyeckichten Prisma, das einerley Grundfläche und Höhe mit der Pyramide hat.

Bew. Man zerschneide ein dreyeckichtes Prisma ADEBCF (Fig. 132.) durch eine Ebene, welche durch die Diagonalen zwoer Seitenflächen des Prisma gehet, z. E. durch die Diagonalen CE und AE.

Durch

Durch diesen Schnitt entstehet die Pyramide ABCE welche mit dem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat. Zertheilt man nun noch das übrige Stück des Prisma nach der Diagonale der dritten Seitenfläche AF, und der ersten AE, so entstehen die zwo Pyramiden ADEF, und ACEF. Nun hat die Pyramide ADEF wieder einerley Grundfläche und Höhe mit dem Prisma. Und derohalben ist die Pyramide ADEF = ABCE. Es ist aber auch die Pyramide ABEC = CEFA. Denn, wenn man die Dreyecke BEC und CEF für Grundflächen genannter Pyramiden nimmt; so sind die Grundflächen gleich; da aber auch beide Pyramiden in der Spitze A zusammenstossen; so haben sie auch gleiche Höhe, und sind folglich einander gleich (§. 226.). Es sind also alle drey Pyramiden, in welche das dreyeckichte Prisma zerschnitten worden, gleich groß. Jede derselben, die mit dem Prisma gleiche Grundfläche und Höhe hat, muß daher der dritte Theil des Prisma seyn.

§. 243. Anm. Ein dreyeckichtes Prisma, das aus Holz, oder einer andern Materie gemacht, und auf die gehörige Art zerschnitten ist, zeigt die Wahrheit des vorigen Lehrsatzes sehr deutlich durch den Augenschein.

§. 244. Zus. Der körperliche Innhalt einer drey-

eckich-

eckichten Pyramide muß also gefunden werden, wenn man den Innhalt der Grundfläche mit der Höhe der Pyramide multiplicirt, und das Product durch 3 dividirt. Wenn also die Grundfläche b, die Höhe a genannt würde; so wäre der Innhalt der Pyramide $= \frac{b \times a}{3} = \frac{b}{3} \times a = b \times \frac{a}{3}$; das heißt: man kann auch den dritten Theil des Innhalts der Grundfläche in die ganze Höhe; oder die ganze Grundfläche in den dritten Theil der Höhe multipliciren, um den körperlichen Innhalt der Pyramide zu bekommen. Den Innhalt abgekürzter Pyramiden zu finden, kömmt in der Fortification vor. Es ist aber dieses nicht so leicht. S. Kästner Geometrie 63 Satz, u. folg. ingleichen Jacob. Bernoulli oper.

§. 245. Zus. Da sich alle vieleckichte Pyramiden in dreyeckichte theilen lassen; so wird auch der körperliche Innhalt einer vieleckichten Pyramide gefunden, wenn der Innhalt der Grundfläche mit der Höhe multiplicirt, und das Product durch 3 dividirt wird.

§. 246. Zus. Kegel sind Pyramiden (§. 223.). Also wird der körperliche Innhalt derselben ebenfalls nach der Vorschrift §. 244. gefunden. Z. E. wenn der Diameter des Kreises 560″; so ist der Innhalt des Kreises, der die Grundfläche des Kegels ausmacht, = 246176″. Nun sey die Höhe des Kegels 892, so

ist,

ist, wenn man den Innhalt der Grundfläche mit der Höhe multiplicirt, und das Product durch 3 dividirt, der körperliche Innhalt des Kegels = 731963 $30\frac{2}{3}''$.

§. 247. Zus. Der Kegel ist der dritte Theil von einem Cylinder, der gleiche Grundfläche, und Höhe mit dem Kegel hat. Denn, wenn man den Innhalt der ganzen Grundfläche mit der Höhe multiplicirt; so bekömmt man den Innhalt eines Cylinders (§. 241.). Um den Innhalt des Kegels zu bestimmen, muß aber das Product durch 3 dividirt werden (§. 246.); also ist der Innhalt des Kegels nur der dritte Theil vom Innhalte des Cylinders, der gleiche Grundfläche und Höhe mit ihm hat.

§. 248. Lehrs. Prismata verhalten sich, wie die Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind; und wenn die Höhen gleich sind; so verhalten sie sich, wie die Grundflächen.

Bew. Es seyen zwey Prismata, deren eines P, das andere p heiße. Des ersten Grundfläche sey G, seine Höhe H. Des andern Grundfläche sey g, seine Höhe h; so ist $P = G \times H$, und $p = g \times h$ (§. 240.); folglich $P : p = G \times H : g \times h$.

Wenn nun die Grundflächen gleich, oder $G = g$

seyn

seyn soll, so ist $P : p = G \times H : G \times h$; oder, wenn man die zwey letzten Glieder der Proportion durch G dividirt, $P : p = H : h$.

Wären aber die Höhen in beiden Prismen gleich, oder $H = h$; so wird aus der Proportion $P : p = G \times H : g \times h$, diese: $P : p = G \times H : g \times H$; und wenn man wieder die zwey letzten Glieder durch H dividirt; so ist $P : p = G : g$.

§. 249. Zus. Weil auch die Cylinder Prismata sind; so muß der vorige Satz von selbigen gelten. Es sind aber die Grundflächen der Cylinder Kreise; und die Kreise verhalten sich nach den oben erwiesenen, wie die Quadrate ihrer Durchmesser oder Halbmesser. Folglich verhalten sich Cylinder, die gleiche Höhe haben, wie die Quadrate der Durchmesser, oder der Halbmesser, ihrer Grundflächen.

§. 250. Zus. Ebenfalls auf Pyramiden erstreckt sich der Lehrsatz §. 248. Nämlich auch die müssen sich wie die Höhen verhalten, wenn die Grundflächen gleich sind; und wie die Grundflächen, wenn die Höhen gleich sind; es ist nämlich von Prismen erwiesen, daß sie sich so verhalten. Da sich aber die Drittel wie die ganzen verhalten, und die Pyramiden Drittel von Prismen sind, die gleiche Grund-

flä-

flächen und Höhen mit ihnen haben (§. 242.), so ist klar, daß der Satz auch von Pyramiden gelte.

§. 251. Zus. Die Kegel haben Kreise zur Grundfläche, und sind der dritte Theil von Cylindern, die gleiche Grundfläche und Höhe mit den Kegeln haben. Da nun die Cylinder, die gleiche Höhe haben, sich wie die Quadrate der Durchmesser oder Halbmesser ihrer Grundflächen verhalten; und da sich die Drittel wie die Ganzen verhalten; so verhalten sich Kegel von gleicher Höhe auch wie die Quadrate der Durchmesser oder Halbmesser ihrer Grundflächen.

§. 252. Erkl. Wenn eine Kugel durch eine Ebene geschnitten wird; so entstehen aus den Schnitten Kreise, welche immer größer werden, je näher die Schnitte dem Mittelpunkte der Kugel kommen. Wenn endlich die Schnitte durch den Mittelpunkt der Kugel gehen; so entstehen dadurch die größten Kreise, und die Kugel selbst wird in zween gleiche Theile, in zwo gleiche Halbkugeln getheilet. Einer der größten Kreise einer Kugel (circulus maximus sphaerae) ist also derjenige Kreis, der durch den Mittelpunkt der Kugel gehet, und dessen Peripherie sich auf der Oberfläche der Kugel endiget.

§. 253. Zus. Wenn man eine Kugel gleichlaufend mit der Fläche des größten Kreises durchschnitte, so daß jeder Schnitt unendlich nahe bey dem vorigen

geschähe; so werden zween auf einander folgende Kreise unendlich wenig von einander unterschieden seyn. Man würde dadurch die Kugel in Stücke zertheilen, die dann Cylinder von unendlich kleiner Höhe wären.

§. 254. Lehrs. Eine Kugel ist $\frac{2}{3}$ von dem Cylinder, der einerley Höhe und Durchmesser mit der Kugel hat.

Bew. Man stelle sich vor, daß das Quadrat ACBD um die Seite AC bewegt werde; so entstehet ein Cylinder. Weil ABC ein rechtwinkelichtes Dreyeck ist, und wenn dieses zugleich mit um die Seite AC bewegt wird, so entstehet ein Kegel. Da ACDGA der vierte Theil eines Zirkels ist; so entstehet durch die Bewegung dieses Quadrantens um AC eine Halbkugel. Diese drey Körper haben gleiche Höhe. Mau kann also aus dem einen nicht mehr Stücke schneiden, als aus dem andern; wenn man nämlich den Schnitten immer einerley Dicke giebt. Man durchschneide nun ferner den Cylinder, Kegel, und die Kugel parallel mit der Grundfläche, so daß die Schnitte immer undenklich nahe bey einander geschehen; dadurch würde der Cylinder, der Kegel, und die Halbkugel in kleine Cylinder von einerley Höhe zertheilet werden (§. 225. und 253.) In der Figur stelle EH den Schnitt vor, der parallel mit

der

der Grundfläche durch alle drey Körper geschehen ist. EH stellt nämlich daselbst den Halbmesser des Durchschnitts im Cylinder, EG den Halbmesser des Durchschnitts in der Kugel und EF den Halbmesser des Durchschnitts vor.

Nun ist, wenn man CG ziehet, CG = CD, weil es der Halbmesser eines Kreises ist. Es ist aber auch CD = EH. Folglich CG = EH, und $CG^q = EH^q$. Da EH parallel mit CD ist; so ist (§. 181.) CE : EF = CA : AB. Es ist aber CA = AB, weil CABD ein Quadrat ist. Also auch CE = EF. Und $CE^q = EF^q$. Weil ferner ACD als der Winkel in einem Quadrate ein rechter Winkel ist; so ist auch CEG ein rechter. Daher ist $CG^q = EG^q + EC^q$. Es ist aber schon vorher $CG^q = EH^q$ und $EC^q = EF^q$ gefunden worden, und also $EH^q = EG^q + EF^q$.

Es verhalten sich nun die Cylinder von einerley Höhe, wie die Quadrate ihrer Halbmesser (§. 249.). Folglich muß der kleine Cylinder, welcher EH zum Halbmesser hat, so groß seyn, als die beiden kleinen Cylinder, welche EG und EF zu Halbmessern haben; das ist: ein Stück der Halbkugel, und ein Stück des Kegels sind zusammen genommen einem Stücke des Cylinders gleich, welcher eben die Dicke, und CD zum Halbmesser hat. Man mag aber dise Körper

parallel mit der Grundfläche in jeder Höhe schneiden; so ist überall nach einem solchen Beweise ein Stück der Halbkugel und des Kegels zusammengenommen dem Stücke des Cylinders gleich. Da dieß für jeden Fall wahr ist; so muß auch die ganze Kugel und der Kegel zusammengenommen dem Cylinder gleich seyn. Also ist Kugel + Kegel = Cylinder, und die Kugel = Cylinder — Kegel. Es ist aber der Kegel $\frac{1}{3}$ vom Cylinder (§. 247.); folglich die Kugel = Cyl. — $\frac{1}{3}$ Cyl., und Cylinder — $\frac{1}{3}$ Cyl. = $\frac{2}{3}$ Cyl.; also die Kugel = $\frac{2}{3}$ Cylinder.

§. 255. Zus. Cylinder, Kugel und Kegel von gleicher Höhe verhalten sich also wie 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ oder wie 3, 2, 1.

§. 256. Anm. Archimedes hat den vorigen Lehrsatz von der Kugel entdeckt. S. seine Bücher de Sphaera & Cylindro. Er schätzte diese Erfindung sehr hoch, und verlangte, man möchte eine Kugel mit einem umschriebenen Cylinder auf sein Grabmal setzen. Es zeigt auch dieser Satz in der That die große Scharfsinnigkeit dieses berühmten Mathematickverständigen.

§. 257. Zus. Man kann also den körperlichen Innhalt einer Kugel finden, wenn man den körperlichen

chen Innhalt eines Cylinders sucht, dessen Höhe und Durchmesser dem Durchmesser der Kugel gleich ist, und und davon $\frac{2}{3}$ nimmt.

Es sey der Durchmesser der Kugel und auch des Cylinders = d. Ferner sey die Peripherie des größten Kreises der Kugel, und also auch der Grundfläche des Cylinders = p. Multiplicirt man nun den vierten Theil des Diameters in die Peripherie, so erhält man den Innhalt der Grundfläche des Cylinders, die also $\frac{1}{4}$ dp ist. Und weil die Höhe des Cylinders dem Durchmesser der Kugel gleichgenommen wird; so ist der Innhalt des Cylinders $\frac{1}{4}$ dpd (§. 241.) oder $\frac{1}{4}pd^2$. Der dritte Theil davon ist $\frac{1}{12}$ pd^2, und also zwey Drittel davon ist = $\frac{2}{12}$ pd^2; das ist $\frac{1}{6}$ pd^2.

Aus diesem letzten Ausdrucke entspringt nun die Regel: der körperliche Innhalt einer Kugel wird gefunden, wenn man das Quadrat ihres Diameters in die Peripherie mnltiplicirt, und das Produrkt durch 6 dividirt.

Ex. Ist der Diameter = 100, so ist die Peripheri = 314. Folglich der körperliche Innhalt der Kugel = $\frac{314 \times 100^2}{6}$ = $\frac{3140000}{6}$ = $523333\frac{1}{3}$.

M 3 §. 252.

§. 258. Zus. Wenn man sich vorstellet, daß die Oberfläche der Kugel in unendlich kleine Flächen, z. E. in Vierecke zertheilet sey; so werden diese kleine Flächen nicht mehr merklich von ebenen Flächen unterschieden seyn. Zieht man noch überdas von den Ecken dieser kleinen Vierecke gerade Linien nach dem Mittelpunkte der Kugel; so bekömmt man eine unendliche Menge Pyramiden, deren Grundflächen zusammen die Oberfläche der Kugel ausmachen, und deren Höhe von dem Halbmesser der Kugel um nichts merkliches werden unterschieden seyn. Diese Beobachtung zeigt einen andern Weg die Kugel zu berechnen. Da die Kugel aus unendlich vielen Pyramiden zusammengesetzt ist; und einer Pyramide Innhalt gefunden wird, wenn man die Grundfläche mit dem dritten Theil der Höhe multiplicirt; so ist also, wenn p eine der kleinen Pyramiden, b ihre Grundfläche, und r ihre Höhe bedeutet $p = \frac{1}{3} r \times b$ (§. 244.).

Wenn n jede Anzahl von Pyramiden bedeutet, woraus man sich die Kugel zusammengesetzt vorstellet; so findet man $n \times p = \frac{1}{3} r \times b \times n$. Es bedeutet aber $n \times p$ die Menge aller Pyramiden, aus denen die Kugel bestehet. Man nenne nun die Kugel S, und $b \times n$ bedeutet die Menge von Grundflächen, welche die Pyramiden haben, die zusammen die Oberfläche der Kugel ausmachen. Man setze also für $b \times n$ ein kleines s, das die Oberfläche der Kugel bedeu-

tet, so wird endlich $S = \frac{1}{3} r \times s$; das heißt: den Innhalt der Kugel erhält man, wenn man die Oberfläche in dem dritten Theil des Halbmessers multiplicirt. Weil $\frac{1}{3}$ vom Halbmesser $\frac{1}{6}$ vom Durchmesser ist; so sagt man auch: das Produkt aus der Oberfläche der Kugel in den sechsten Theil ihres Durchmessers giebt den körperlichen Innhalt der Kugel; wenn also der Durchmesser d heißt; so wäre $S = \frac{1}{6} ds$.

§. 259. Zus. Aus den beiden unmittelbar vorhergehenden Zusätzen ergiebt sich, wie die Oberfläche einer Kugel müsse berechnet werden. Es war nämlich $S = \frac{1}{6} pd^2$ (§. 257.), und ebenfalls $S = \frac{1}{6} ds$ (§. 258.). Folglich $\frac{1}{6} pd^2 = \frac{1}{6} ds$. Man multiplicire nun beiderseits mit 6, so wird $pd^2 = ds$, und dividire beiderseits mit d, so wird endlich $pd = s$.

Da s die Oberfläche der Kugel, p die Peripherie des größten Kreises, und d seinen Diameter bedeutet; so ist die Oberfläche der Kugel einem Produkt aus dem Diameter in die Peripherie ihres größten Kreises gleich.

Ex. Es sey der Durchmesser einer Kugel 5600″, so ist die Peripherie des größten Kreises 17584″. Folglich geben beide Zahlen mit einander multiplicirt die Oberfläche der Kugel = 984704″. Multi-

plicirt man nun ferner die Oberfläche mit dem sechsten Theil des Diameters; oder multiplicirt man die Oberfläche durch den ganzen Diameter, und dividirt das Produkt durch 6; so bekömmt man den körperlichen Innhalt der Kugel $= 91905706\frac{2}{3}''$ (§. 258.) Man kann also aus dem gegebenen Durchmesser einer Kugel ihre Oberfläche, ingleichen ihren körperlichen Innhalt finden.

§. 260. Zus. Die Oberfläche einer Kugel verhält sich zum Innhalte des größten Kreises, wie 4 : 1. Denn, weil der größte Kreis einer Kugel mit letzterer einerley Mittelpunkt, und Durchmesser hat; so bedeutet d oder der Durchmesser in beiden einerley. Da der Durchmesser in beiden einerley ist; so ist auch die Peripherie von beiden gleichen Durchmessern einerley, oder p. Man fände nun die Oberfläche der Kugel, wenn man die Peripherie in den Diameter derselben multiplicirte, oder sie wäre (§. 259.) pd. Der Innhalt des Kreises aber, dessen Durchmesser d und dessen Peripherie p ist, wird gefunden, wenn man deu vierten Theil des Diameters in die Peripherie multiplicirt, oder der Innhalt des größten Kreises ist $\frac{1}{4}$ dp. Also ist die Oberfläche der Kugel zum Innhalt des größten Kreises $=$ pd : $\frac{1}{4}$ pd. Und wenn man die zwey letzten Glieder der Proportion durch 4 multiplicirt $=$ 4 pd : pd, und wenn man beide durch pd dividirt $=$ 4 : 1.

§. 261.

§. 261. Zus. Es verhält sich der körperliche Innhalt einer Kugel zu dem Würfel ihres Diameters beynahe wie 157. zu 300. Der körperliche Innhalt der Kugel war $523333\frac{1}{3}$ (§. 257.), wenn der Diameter 100. Theile hatte. Nimmt man nun ebenfalls diesen Durchmesser zur Seite eines Würfels an; so ist des Würfels körperlicher Innhalt $100 \times 100 \times 100 = 1000000$. Es ist also, wenn die Kugel S und der Würfel C heißt, $S : C = 523333\frac{1}{3} : 1000000$; oder wenn man die zwey letzten Glieder durch 3 multiplicirt, $S : C = 1570000 : 3000000$, und wenn man beide Glieder durch 10000 dividirt, $S : C = 157 : 300$.

Es verhält sich also auch umgewendet der Würfel des Durchmessers einer Kugel zum körperlichen Innhalte der Kugel wie 300 : 157; oder $C : S = 300 : 157$. Da aber diese Rechnung sich auf das Verhältniß des Diameters zur Peripherie, nämlich wie 100 zu 314 gründet, dieses Verhältniß aber nicht vollkommen genau ist; so ist auch das Verhältniß, das die Kugel zum Würfel ihres Durchmessers hat, nicht in größter Schärfe richtig.

Hiedurch ist man im Stande, den körperlichen Innhalt ebenfalls zu finden. Man müßte nämlich, wenn der Durchmesser einer Kugel gegeben wäre, die Zahl, welche den Durchmesser bestimmt, dreymal durch sich selbst multipliciren, oder den Cubus von der Zahl machen, und zu 300, 157 und dem Wür-

fel des gegebenen Diameters die vierte Proportionalzahl suchen.

Ex. Es sey der Durchmesser einer Kugel = 64″; so ist der Würfel davon 262144; und 300 : 157 = 262144″ : $\frac{262144 \times 157}{300}$. Es ist aber $\frac{262144 \times 157}{300}$ = 137188″ $\frac{208}{300}$ = dem Innhalte der Kugel.

§. 262. Zus. Manchmal verlangt man aus dem gegebenen Innhalte der Kugel ihren Diameter zu wissen. Auch dieses kann dadurch bewerkstelliget werden, daß man zu 157, 300, und dem gegebenen Innhalte der Kugel die vierte Proportionalzahl sucht; welche dann der Würfel ihres Durchmessers seyn wird. Ziehet man nun noch die Cubikwurzel aus der vierten Proportionalzahl, so bekömmt man den Durchmesser selbst.

Ex. Es sey der Innhalt 137188″ $\frac{208}{300}$; so ist 157 : 300 = 137188″ $\frac{208}{300}$: Würfel des Diameters. Man multiplicire die beiden mittlern Glieder in einander, so bekömmt man 137188 × 300 + $\frac{208}{300}$ × 300; das ist 41156400 + 208. Also zusammen 41156608″. Dividirt man diese Zahl durch das erste Glied 157; so entstehet der Quotient 262144. Hieraus ziehe man nun die Cubikwurzel.

262 | 144 | 64'' = dem Durchmesser
216 | der Kugel.

46 144
108
432
288
64

46144

§. 263. Zus. Kugeln verhalten sich gegeneinander, wie die Würfel ihrer Durchmesser. Denn, wenn die eine Kugel S, der Würfel ihres Durchmessers C, die andere Kugel s, der Würfel ihres Durchmessers c heißt; so ist gezeigt worden, daß S : C = 157 : 300, und s : c = 157 : 300 (§. 261.). Folglich S : C = s : c; oder permutando S : s = C : c.

Wäre also der Durchmesser einer Kugel 1, der andere 2, so wären die Würfel dieser Zahlen 1 und 8, folglich die Kugel, welche 2 zum Durchmesser hat, wäre 8mal größer, als die erste. So würde eine Kugel, die 3 zum Durchmesser hätte, 27mal größer seyn, als eine andere, die 1 zum Durchmesser hat. Denn der Würfel von 3 ist 27, und von 1 wieder 1.

§. 264.

§. 264. Anm. Es ist für den, der die Lehren von Ausrechnung der ebenen Figuren inne hat, leicht, die Oberflächen der Körper ohne weitere Anweisung zu berechnen. Außerdem giebt es aber noch andere Körper, zu deren Berechnung ihres körperlichen Innhalts sowohl, als ihrer Oberfläche die höhere Geometrie erfodert wird. Manchmal können Körper, die hier nicht beschrieben worden sind, ausgerechnet werden, wenn man sie in Stücke theilen kann, deren jedes ein Körper von den bisher gedachten ist. Noch ein allgemeines Verfahren jeden auch noch so unordentlichen Körperinnhalt zu berechnen, das zwar eigentlich nicht zur Geometrie, sondern zur Mechanik gehöret, kömmt in folgender Aufgabe vor. Zu seiner Nachahmung sind noch andere Methoden erfunden worden; wovon die Mechanik handelt.

§. 265. Aufg. Eines jeden unordentlichen Körpers Innhalt zu finden.

Aufl. Man verfertige sich ein hohles Parallelepipedum (fig. 134.), das eher hoh, als niedrig und weit seyn muß. Man lege den Körper in dieses Parallelepipedum, und überschütte ihn mit Wasser oder Sand. Man merke die Höhe des Wassers, oder wohl geebneten Sands AB. Man nehme hierauf den Körper heraus, und merke wieder die Höhe des Wassers oder Sandes, der wieder geebnet seyn muß; so

so weiß man BC. Da nun der Innhalt des Körpers dem Parallelepipedum BDFCGE gleich ist, so messe man seine seine Länge CE und seine Breite EG, und berechne den Innhalt des Parallelepipedums.

Ex. Es sey AB = 8′, AC = 5′, so ist BC = 3′. Wenn nun ferner CE = 12′, EG = 4′; so wird der Innhalt des Parallelepipedums, und folglich des Körpers gefunden.

§. 266. Erkl. Der Maaßstab, welcher dazu gebraucht wird, um zu finden, wie viel Maaße oder Kannen einer flüßigen Materie in einem Fasse oder cylindrischem Gefäße Raum haben, heißt ein Visirstab. Das Ausmessen eines Fasses nennet man Visiren.

§. 267. Aufg. Einen Visirstab zu verfertigen, und vermittelst desselben zu finden, wie viel Maaß oder Kannen einer flüßigen Materie z. E. Wasser, Wein, Bier und dergl. in einem Cylinder enthalten sind.

Aufl. Man trage auf die beiden Schenkel eines rechten Winkels (fig. 135.) den Diameter desjenigen Kannen = oder Maaßgefäßes, welches an dem Orte, wo der Visirstab gebraucht werden soll, eingeführt ist. Es sey also in der Figur AB = BC = dem Diameter

ters des Kannen- oder Maaßgefäßes. Man ziehe die Hypothenuse AC, so ist diese der Diameter eines zweykannigen Gefäßes. Man mache BD = AC, so ist DA der Diameter eines dreykannigen Gefäßes. Wenn ferner BE = AD gemacht wird, so ist die Hypothenuse EA der Diameter eines vierkannigen Gefäßes, welches mit dem einkannigen einerley Höhe hat, und so fahre man fort, nachdem es erforderlich ist. Nun trage man diese Durchmesser BC, BD, BE u. s. w. auf einen prismatischen Stab von hartem Holze, Elfenbein, oder Metall, und schreibe, wo die Punkte C, D, E, u. s. w. hinfallen, die Zahlen 1, 2, 3. Auf die andere Seite des Stabes setze man die Höhe des Kannengefäßes so vielmal hintereinander, als es die Länge des Stabes zuläßt.

Wenn man nun einen Cylinder mit diesem Stabe ausmessen will; so messe man mit derjenigen Seite, worauf sich die Durchmesser befinden, den Durchmesser der Grundfläche vom cylindrischen Gefäße; so erfährt man, wie viel Kannen neben einander auf der Grundfläche des Cylinders Raum haben. Man messe nun auch mit derjenigen Seite des Stabes, worauf die Höhen des Kannengefäßes stehen, die Höhe oder Länge des gegebenen Cylinders; so sieht man, wie vielmal die Anzahl der Kannen oder Maaße, die auf der Grundfläche stehen, über einander stehen. Derowegen multiplicire man den gemessenen Diameter

meter des Kannegefäßes durch die Höhe, so erfährt man den Innhalt des cylindrischen Gefäßes.

Bew. Es ist schon vorhin bewiesen worden, daß $CA^2 = 2 BA^2$ im Falle, daß $BA = BC$ ist, und da $DB = CA$ ist; so weiß man auch, daß $DB^2 = 2 BA^2$; und gleichergestalt ist $EB^2 = 3 AB^2$ u. s. w. Nun verhalten sich die Cylinder, die einerley Höhe haben, wie die Quadrate ihrer Durchmesser. Weil nun BC der Durchmesser eines einkannigen Cylinders ist, so muß DB der Durchmesser von einem Cylinder von zweyen Maaßen seyn, u. s. w. Es ist aus diesem klar, wenn man den Durchmesser eines Cylinders mit einem solchen Visirstabe mißt, daß man die Anzahl der Kannen findet, die auf dem Boden des Gefäßes stehen. Wenn man aber auch mit der andern Seite des Visirstabes die Höhe des Cylinders mißt; so findet man, wie vielmal die Anzahl der Kannen, die auf dem Boden Raum haben, übereinander stehen. Man bekömmt also den Inhalt, wenn man die gemessene Höhe des Cylinders mit dem gemessenen Durchmesser des cylindrischen Gefäßes multiplicirt.

Ex. Es sey der Diameter eines Cylinders = 8, seine Höhe = 12, so haben $8 \times 12 = 96$ Maaß Raum darin.

§. 268.

§. 268. Aufg. Ein gegebnes Faß zu visiren.

Aufl. Man hat durch die Erfahrung gefunden, daß der Innhalt eines gewöhnlichen Fasses einem Cylinder gleich sey, dessen Höhe, mit der Länge des Fasses übereinkömmt, und dessen Diameter Grundfläche, die mittlere arithmetische Proportionalzahl zwischen den beiden Diametern des Bodens, und des Bauches ist. Denn in Fig. 139 sieht man, wenn man den Boden GH zur Grundfläche annehmen wollte, so bekämme man einen Cylinder GIHK, und auf der andern Seite noch einen, die beyde zusammen kleiner als das Faß wären; nähme man aber den Bauch des Fasses BD zur Grundfläche, so würde der Cylinder ABCD, und auf der andern Seite der BEDF zusammen größer als das Faß seyn.

Um also ein Faß zu visiren, so messe man mit derjenigen Seite des Visirstabes, welche die Durchmesser enthält, sowohl den Diameter BD durchs Spundloch, und auch den Diameter GH des Bodens, und suche die mittlere arithmetische Proportonalzahl; das ist, man addire BD und GH, und nehme die Hälfte davon. Man messe auch mit der andern Seite des Stabes, worauf sich die Höhen des Kannengefässes befinden, die Länge des Fasses AE, und multiplicire die mittlere arithmetische Proportio-

tionalzahl, die man schon gefunden, mit der Länge des Fasses. Das Product giebt alsdann den Innhalt.

Ex. Es sey GH = 8, BD = 12, so findet man die mittlere arithmetische Proportionalzahl $\frac{8+12}{2}$ = 10. Es sey nun AE = 15, so ist der Innhalt des Fasses 15 × 10 = 150 Maaß.

§. 269. Anm. Man hat auch Visirstäbe, die sogleich ohne Rechnung den Innhalt des Fasses angeben. Sie setzen aber gewisse Verhältnisse der Durchmesser eines Fasses zum voraus, und sind also nur an einem Orte, wo Fässer nach diesen Verhältnissen gebunden werden, zu gebrauchen. Die Algebra zeigt übrigens Mittel, Fässer, die nicht voll sind, zu visiren.

Anhang

Kurzgefaßte Geschichte der Geometrie.

Das Wort Geometrie stammt wieder aus dem griechischen her, und heißt so viel, als die Erdmeßkunst. Sie mag freylich in den ältesten Zeiten nichts

anders, als eine ungebildete Kunst Felder und Wiesen auszumessen, gewesen seyn. Der erste Ursprung Geometrie ist wohl bey den Aegyptiern zu suchen. Denn es ist nicht unwahrscheinlich, daß die jährlichen Ueberschwemmungen des Nilflusses die Einwohner Aegyptens genöthiget haben, auf die Ausmessung ihrer Felder, und Bestimmung ihrer Gränze bedacht zu seyn. Wie weit es aber eigentlich die Aegyptier in der Geometrie gebracht haben, ist nicht bekannt. Es ist aber wahrscheinlich, daß sich die Kenntnisse der Aegyptier nicht viel weiter als auf Vorschriften, Felder zu messen und zu vertheilen, so wie dergleichen unsre heutige handwerksmäßige Feldmesser haben, erstreckt haben. Denn wie jetzt gleich erhellen wird, sind die vornehmsten Sätze der Geometrie von den Griechen erfunden worden. Vielleicht ist aber auch die Vermuthung wahr, daß zu Salomons, und noch früher, zu Mosis Zeiten die geometrischen Wissenschaften bey den Aegyptiern im Flor gewesen, von den Nachkommen aber vernachläßiget, und vergessen worden sind.

Die Griechen brachten die Geometrie zu größerer Vollkommenheit. **Euphorbus** aus Phrygien soll der erste gewesen seyn, welcher die Linien und ihr Verhältniß gegen einander in Betrachtung gezogen hat. Laertius meldet auch von ihm, daß er das ungleichseitige Dreyeck erfunden habe. **Thales** von

Milet

Milet that 632 Jahr vor Christi Geburt eine Reise nach Aegypten, und ließ sich noch in seinem Alter von den aegyptischen Priestern unterrichten. Unter andern soll er daselbst die Höhe der Pyramiden aus dem Schatten, den sie werfen, zu messen gelernet haben. Er erfand auch die Gleichheit der Verticalwinkel und die Gleichheit der Winkel an der Grundlinie in dem gleichschenkelichten Dreyecke. Wie Proclus bezeigt; so hat auch Thales zuerst den Beweis gegeben, daß der Kreis durch den Durchmesser in zween gleiche Theile getheilet werde. Nach diesem reisete Pythagoras schon im zwanzigsten Jahre seines Alters nach Aegypten, und als er im vierzigsten Jahre nach Italien zurückkam, erwarb er sich in der Philosophie und Mathematik großen Ruhm. Von ihm sind die wichtigen Lehrsätze, daß in einem geradelinichten Dreyecke alle Winkel zusammen genommen zween Rechte, oder 180° ausmachen, und dann das berühmte pythagorische Theorem, wie schon an seinem Orte gemeldet worden, erfunden worden. Pythagoras starb im achtzigsten Jahre seines Alters 540 Jahr vor Christi Geburt. Da nun von diesen Männern gesagt wird, daß sie die genannten Sätze erfunden, und nicht irgend aus Aegypten mitgebracht haben; so müssen wohl die Aegyptier von der theoretischen Geometrie wenig gewußt haben. Als nicht lange nach Pythagoras die philosophischen Schulen zu Athen aufkamen, so findet man, daß

Socrates der Geometrie zwar kundig gewesen, daß sie aber nicht so viel ihre Ausbreitung ihm, als seinem berühmten Schüler Plato zu verdanken habe. Plato war überzeugt, daß niemand in den philosophischen Wissenschaften glücklichen Fortgang machen könne, der seinen Verstand nicht durch die geometrischen Wissenschaften geübt hatte. Er ließ daher keinen Schüler zu seinem philosophischen Unterricht, der nicht hinlänglich in der Geometrie bewandert war. Er selbst erklärte auch außer den philosophischen Lehrsätzen täglich einen geometrischen Satz. Plato starb 346 Jahr vor Christi Geburt, und einige Aufgaben, deren in den Anfangsgründen keine Erwähnung geschiehet, hat er aufgelöset. Um Plato's und seiner Nachfolger Zeiten muß die Geometrie im Flor gestanden haben. Selbst die Priester nahmen Antheil daran, um die Geometrie mehr auszubreiten. Es ist z. B. wahrscheinlich, daß die delphischen Priester den Würfel geometrisch verdoppeln konnten. Um mit den Geometern zu wetteifern, ist die Aufgabe von ihnen vorgelegt worden; und daher mag die bekannte Geschichte von dem delphischen Problem entstanden seyn. Plato machte bey dieser Gelegenheit den Einwohnern zu Delphi den Vorwurf: sie wurden von dem Orakel verspottet, da sie die Aufgabe nicht geometrisch auflösen könnten; das dann daher rühre; weil sie die Geometrie nicht studirt hätten. Hieraus sieht man, daß damals die Gelehrten auf die

Ausbreitung der Geometrie sehr bedacht gewesen sind. **Hippocrates von Chius**, ein Kaufmann, gieng nach Athen; um sich über die Seeräuber zu beklagen, die ihn auf dem Meere angefallen hatten. Als er aber mit den Philosophen bekannt wurde, verließ er sein Gewerbe, und legte sich auf die Geometrie. Diesem Manne hat die Geometrie verschiedene Erfindungen zu verdanken. Die lunulae Hippocratis, ob sie gleich zur Quadratur des Kreises nicht gebraucht werden können, zeigen ebenfalls von dem scharfsinnigen Geiste dieses Mannes.

Von verschiedenen Männern wurde die Geometrie solchergestalt bey den Griechen mehr zur Vollkommenheit gebracht. Endlich 300 Jahr vor Christi Geburt schrieb **Euklides** der erste Lehrer der Mathematik zu Alexandrien, in 15 Büchern ein vortrefliches geometrisches Handbuch. Mit diesem Euklides muß der aus Megara gebürtige, finstere, mürrische, zanksüchtige Philosoph Euklides nicht verwechselt werden, welches oft geschieht. Die geometrischen Schriften des Euklides haben ihren Werth in allen folgenden Jahrhunderten behalten. Dechales schätzte sie so hoch, daß er sie nach der heil. Schrift für das beste Buch in der Welt hielt. Doch fanden sich auch Tadler; worunter sonderlich Petrus Ramus und Lazarus Schoner bekannt sind. Petrus Ramus, der sich der aristotelischen Philosophie vor ungefähr

200 Jahren so heftig in Frankreich widersetzte, tadelte auch die Ordnung im Euklides, und wollte ihn verbessern. Er gab deswegen heraus: Petri Rami Arithmetices libri duo, Geometriae septem & viginti, a Lazaro Schonero recogniti & aucti. Allein Ramus hatte eine unnütze Bemühung angewendet. Weder die Ordnung, noch die Lehrart im Euklides konnte von Ramus verbessert werden; und die Kenner zogen den unverbesserten Euklides dem verbesserten des Ramus vor. Wegen der Vortreflichkeit wurde Euklides nach und nach in alle Sprachen übersetzt, mit vielen Anmerkungen und Erläuterungen versehen, auch auf andere Arten verändert. So gab z. B. Joh. Scheubel, Prof. der Mathematik zu Tübingen im Jahr 1550 die 6 ersten Bücher des Euklides heraus, ließ aber in den Beweisen alle Buchstaben hinweg, deren sich Euklides bedienet hatte, und setzte die Namen der Sachen selbst dafür. Christian Härlin und Conrad Dasypodius gaben 1566 diese 6 Bücher heraus; worin die Beweise in förmlichen Schlüssen vorgetragen wurden. Von den Ausgaben des Euklides ist wohl auch noch etwas zu merken. Seit Erfindung der Buchdruckerey ist er zum erstenmal in unserm Vaterlande von Erhard Ratdolt in Augsburg 1482 aufgelegt worden. Es ist aber diese Ausgabe ungemein selten. Kästner in einem Schreiben an den Cardinal Quirini und Prof. Clemm in Amoenit. nov. lit. beschrieben sie. David Grego-

ri,

ri, Prof. der Astronomie zu Oxfort hat alle euklidische Schriften correct, und mit typographischer Nettigkeit im Jahr 1703 zu Oxfort abdrucken lassen. Es ist diese Auflage in Folio, und enthält den griechischen Text nebst der lateinischen Uebersetzung. Der Jesuit Christoph Clavius hat viele Zusätze dem Euklides beygefügt. Dadurch ist diese Ausgabe sehr weitläufig geworden. Unter den kleinen Handausgaben verdient sonderlich die angerühmt zu werden, welche der Prof. der Mathematik zu Combridge Isaak Barrow besorgt hat. Sie hat den Titel Euclidis Elementorum Libri XV breuiter demonſtrati, opera Iſ. Barrow. Londini 1659. Es ist aber auch, wie Wolf schreibt, des Barrow Ausgabe zu Cambridge abgedruckt worden.

Auf Euklides 250 Jahre vor Chr. Geb. folgte Archimedes von Syrakus, dem die ganze Mathematik, und besonders auch die Geometrie wichtige Zusätze und Erfindungen zu verdanken hat. Einige Erfindungen von ihm sind in den Anmerkungen dieses Lehrbuches schon genannt worden. Die andern Geometern unter den Alten, als Apollonius, Pappus gehören eigentlich nicht hieher. Sie haben sich hauptsächlich um die Lehre von deu Kegelschnitten sehr verdient gemacht.

In diesem Zustande wurde die Geometrie etliche hundert Jahre erhalten; und die Saracennen, die verschiedene mathematische Wissenschaften trieben, ließen auch die Geometrie nicht außer acht. Mittlerweile bey den Christen diese erhabene Wissenschaft gänzlich vernachläßiget wurde.

Johann Christoph Sturm machte im vorigen Jahrhunderte den Anfang, die mathematischen Kenntnisse in Deutschland gemeiner zu machen, als sie zuvor waren. Noch mehr hat Deutschland dem Baron von Wolf in diesem Jahrhunderte zu danken. Seine Bemühungen waren dahin gerichtet, die Mathematik unter uns mehr auszubreiten. Und " Deutschland wird den Freyherrn von Wolf (wie Kästner sagt) noch mit Hochachtung nennen, wenn die Namen der meisten seiner Verächter nur noch in den Insectenverzeichnissen dauern werden, die der Fleiß deutscher Litteratoren sammelt. „ Da die Mathematik dem gemeinen Haufen deutscher Studenten und Professoren kaum dem Namen nach bekannt war; so verfuhr Wolf sehr weislich, daß er in seinen Anfangsgründen nur wenig und das leichteste vortrug. Da es den meisten Studirenden um diese Zeiten schwer schien, eine kurze Reihe vernünftiger Schlüsse im Zusammenhange zu überdenken; so war Wolf ebenfalls genöthiget, eine Abänderung in den Beweisen vorzunehmen, und die euklidische Methode oft zu ver-

lassen. Hausen Prof zu Leipzig, der nachher ein vortrefliches aber triefsinniges Lehrchuch zu schreiben anfieng, bekam daher auch nicht so viele Nachfolger und Epitomatores. Wenn er aber auch nichts geschrieben hätte; so würde sein Schüler Kästner des Lehrers Namen auf die Nachwelt gebracht, und ihn unvergeßlich gemacht haben, so wie Sokrates, durch seine Schüler Plato und Xenophon in beständiges Andenken kam.

Hr. geheimde Rath von Segner, als er noch Lehrer zu Göttingen war, suchte das wolfische Lehrbuch durch ein bessers, das nunmehr den Bedürfnissen der Zeiten gemässer wäre, zu verdrängen. Es widersetzten sich ihm zwar verschiedene; doch war es diesem erhabenen Geometer leicht, die gemachten Einwürfe zu widerlegen; da er die Wahrheit auf seiner Seite hatte. Und weil sich die Wahrheit doch auch durch sich selbst empfiehlt, und Eingang findet, manchmal über kurz, manchmal über lang; so geschah es auch hier, daß durch diese Bemühungen die Mathematik und sonderbar die Geometrie in verschiedenen Gegenden Deutschlandes auf ihre alte Würde zurückgebracht wurde. Andere große Mathematiker, Kästner, Karsten, trugen durch ihre Bemühungen ebenfalls ungemein viel bey, um die Geometrie in der ihr angemessenen Methode den Deutschen zu empfehlen. Viele andere würdige Männer gehen noch jetzt beständig damit um, die Geometrie weiter auszubreiten.

Anfangsgründe der ebenen Trigonometrie.

I. Abschnitt.

Vorläufige Kenntnisse.

§. 1. Erkl. Die Trigonometrie lehret, aus so viel gegebenen Seiten und Winkeln, als ein Dreyeck bestimmen, wenn solche in Zahlen gegeben sind, die andern unbekannten Seiten und Winkel durch Rechnung zu finden.

Man theilet die Trigonometrie in die ebene, und sphärische. Die ebene Trigonometrie (trigonometria plana) handelt von der Ausrechnung geradelinichter Dreyecke; die sphärische Trigonometrie

metrie (sphaerica) aber zeigt, wie man solche Dreyecke ausrechnen könne, deren Seiten, Bögen, Kreise auf der Oberfläche einer Kugel sind. Die Dreyecke selbst nennet man sphärische Dreyecke.

§. 2. Zus. Es muß unter den Stücken, welche von einem Dreyecke gegeben sind, um die andern unbekannten zu finden, wenigstens eine Seite seyn. Denn die Winkel allein bestimmen unzählige ähnliche Dreyecke (speciem trianguli).

§. 3. Anm. Nach dem Beyspiele Hr. Prof. Eberts sey es erlaubt, etwas vom Nutzen und der Nothwendigkeit der Trigonometrie zu erwehnen. Es ist in der Geometrie zwar gezeigt worden, wie man aus den Stücken, die ein Dreyeck bestimmen, entweder ein gleiches, oder ähnliches Dreyeck construiren, und hernach das Unbekannte durch Ausmessung mit dem Maaßstabe oder Transporteur finden könne. Eben auf diesen Lehren hat auch die Feldmeßkunst beruhet. Allein, wenn man betrachtet, daß man sowohl bey der Zeichnung solcher Dreyecke, als auch bey der Ausmessung der Theile, die man sucht, nothwendig fehlen muß, das theils von der Unvollkommenheit der Instrumente, theils von der Schwäche unserer Sinne herrühret; so wird man in dieser Betrachtung den geometrischen Zeichnungen keinen grossen Werth beylegen. Wenn man aber im Gegen-

theile

theile überlegt, daß überhaupt alle Größen durch Rechnen viel genauer, als durch unmittelbares Abmessen gefunden werden (weil im ersten Falle immer die kleinsten Theilchen sich durch den Verstand deutlich unterscheiden lassen, im andern Falle die Sinne aber bald stumpf werden); so wird man leicht den Nutzen der Trigonometrie eingestehen. Wenn man zum Beyspiel eine Weite von vielen Meilen durch eine geometrische Construction finden sollte, so müßte man aus den bekannten Stücken des Dreyeckes ein ähnliches auf dem Papiere entwerfen. Man wird alsdann aber genöthiget seyn, einen kleinen Theil vom verjüngten Maaßstabe für 1000 und mehrere Ruthen anzunehmen. Gesetzt ein Zoll auf dem Maaßstabe bedeute 2000 Ruthen, und man fehlte im Abmessen um den zehenten Theil eines Zolls, welche Fehler beynahe unvermeidlich sind, so wäre bey der zu messenden Weite also um 20 Ruthen gefehlt worden, das in der That doch schon ein beträchtlicher Fehler ist. Je größer die Linien sind, welche man zu messen hat, desto mehr setzt man sich der Gefahr aus, zu fehlen. Am Himmel sind oft Linien zu messen, die viele tausend Millionen Meilen betragen. Da würde man also, wenn man durch geometrische Constructionen das gesuchte finden wollte, einen kleinen Theil auf dem verjüngten Maaßstabe 1000 und mehr Millionen Meilen gelten lassen; und wenn man dann bey der Ausmessung der ge-

funde-

fundenen Linie nur um den tausendsten Theil eines Zolls fehlte, so könnte das wohl eine Million Meilen am Himmel betragen. Bey allem diesen wird aber angenommen, und vorausgesetzt, daß bey dem Messen der Winkel und Linien, die zur Zeichnung eines ähnlichen Dreyecks nöthig sind, und bey der Zeichnung des Dreyecks selbst kein Fehler begangen werde. Was das erste anbetrifft, so kann ein geschickter Mensch mit Hilfe guter Instrumente die Winkel bis auf sehr kleine Eintheilungen richtig, und zum wenigsten, ohne merklichen Fehler, messen. Er kann aber nicht verhüten, daß sich nicht Fehler bey der Zeichnung der Winkel, und manchmal ungemein große Fehler einschleichen sollten. Denn um kleine Winkel z. E. Secunden und Theile der Secunden aufs Papier tragen zu können, müßten die Instrumente, deren man sich bedienen wollte, eine ansehnliche Größe haben. Eben durch die Größe würden sie zum Gebrauche unbequem, und wieder unbrauchbar werden. Mit den kleinen begehet man aber in solchen Fällen nothwendig Fehler.

Aus diesem siehet man, daß in der praktischen Geometrie und in vielen andern Fällen, ohne Trigonometrie keine Genauigkeit zu erwarten sey.

§. 4. Lehrs. In einem geradelinichten Dreyecke ABC (Fig. 1.) stehet die größere Seite, dem größern Winkel gegenüber.

In

In der Figur sey der Winkel BAC größer, als ACB, so wird behauptet, daß die Seite BC, welche dem größern Winkel gegenüberstehet, größer sey, als BA, welche dem kleinen Winkel gegenüber stehet.

Bew. Da der Winkel BAC größer als der ACB seyn soll; so nehme man von dem ersten einen Theil, der dem andern Winkel ACB gleich sey; z. E. es mag bAC = ACB seyn. Folglich muß auch nach den Grundsätzen der Geometrie bA = bC seyn. Also ist ebenfalls, wenn man gleiches zu gleichem addirt, bA + Bb = bC + Bb, und bC + Bb = BC; folglich bA + Bb = BC. Nun sind in einem Dreyecke zwo Seiten zusammen genommen größer als der dritte. Folglich im Dreyecke AbB ist bA + Bb > BA. Derohalben muß auch BC > BA seyn; weil BC = bA + Bb vorher gezeigt worden.

§. 5. Zus. Man kann aber nicht schließen, daß die Winkel in einem Dreyecke sich so, wie die gegenüberstehenden Seiten verhalten. Es zeigt sich diese Behauptung gleich durch folgende Instanz: Es sey (Fig. 2.) ABC ein rechtwinkelichtes Dreyeck, und zwar sey AC = AB. Es ist daher auch der Winkel C = B. Da nun ferner der Winkel A ein rechter ist, so hat er 90°. Die beyden übrigen Winkel B + C sind also zusammen auch = 90°; und da sie einander gleich sind, so hält jeder 45°. Es verhält

sich

sich also der Winkel $A : B = 90 : 45$, oder wie $2 : 1$, wenn man nämlich die beiden letzten Glieder durch 45 dividirt.

Wenn man nun die Seiten betrachtet, so ist vermöge des pythagorischen Lehrsatzes $BC^2 = AB^2 + AC^2$. Man drücke AB nunmehr in Zahlen aus; es mag AB oder $AC = 3$ seyn; so ist $BC^2 = 3^2 + 3^2$, oder $BC^2 = 9 + 9$, oder $BC^2 = 18$. Und wenn man beiderseits die Wurzel auszieher, $BC = \sqrt{18}$. Nun ist die Quadratwurzel aus $18 = 4$ und ein Bruch; ungefähr 4, 2. Es verhält sich daher die Seite $BC : AC = 4,2 : 3$; folglich verhalten sich die Seiten nicht, wie die gegenüber stehenden Winkel; denn deren Verhältniß war wie $2 : 1$.

Auch die Cirkelbogen, die das Maaß der Winkel sind, verhalten sich nicht, wie die gegenüber stehenden Seiten in den Dreyecken. Denn da die gedachten Bogen das Maaß der Winkel sind, und sich folglich wie die Winkel selbst verhalten; die Winkel aber nach dem vorhergehenden nicht mit den gegenüber stehenden Seiten der Dreyecke in Proportion stehen; so können eben so wenig die Cirkelbogen, die das Maaß der Winkel sind, mit den gegenüber stehenden Seiten im Dreyecke eine Proportion ausmachen.

Aus

Aus dieser Betrachtung ist offenbar: daß man die Regel de Tri nicht anwenden könne, um aus gegebenen Seiten und Winkeln das unbekannte zu finden. Es stehen nämlich Seiten des Dreyeckes und Winkel, oder das Maaß der Winkel in keiner Proportion. Daher ist man nun genöthiget gewesen, gewisse andere Linien zu erfinden, welche sich statt der Winkel oder ihres Maaßes gebrauchen lassen, und die mit den Seiten des Dreyeckes doch in Proportion stehen; und dieses sind eben die trigonometrischen Linien, die in folgenden Erklärungen vorkommen.

§. 6. **Erkl.** Wenn man in einem Kreise nach Willkühr einen Bogen nimmt, wie z. E. AB in Fig. 3. aus dem Mittelpunkte C die Halbmesser CA, CB gegen die Endpunkte des Bogens ziehet, und auf dem einen Halbmesser BC aus dem andern Endpunkte A ein Perpendikel fallen läßt, z. E. AD; so heißt dieses Perpendikel AD des **Bogens AB Sinus**, oder des **Winkels C Sinus**.

§. 7. **Zus.** Man nehme ferner einen etwas größern Bogen als AB ist, so wird auch der Sinus des Bogens oder Winkels größer werden. Ja die Sinusse werden wachsen, bis endlich A in Punkt F fällt, und alsdann wird BCF ein rechter Winkel oder der Bogen BF in Quadrant; und der Sinus von

einem

einem rechten Winkel wird FC oder der Halbmesser.

Man nehme nunmehr größere Bogen, als Quadranten; so wachsen zwar die Bogen; aber die Sinus nehmen immer mehr ab, je größer der Bogen wird. In Fig. 4, wenn man den Sinus für den Bogen AB oder den Winkel ACB sucht; so müßte man aus B ein Perpendikel BE fallen lassen, so würde dieses vermöge der Erklärung der verlangte Sinus seyn. Von dem Bogen ABF, der größer als AB ist, würde der Sinus FG seyn; folglich kleiner als BE. Wenn man nun immer größere Bogen nimmt; so fällt endlich F in H, der Bogen wird alsdann der halbe Umkreis, und sein Winkel zween Rechten gleich. Der Sinus aber verschwindet gänzlich.

Diese bisher betrachteten Sinusse gehören zu Bogen, die nicht mehr als der halbe Umkreis oder 180° betragen, und also zu Winkeln, die nicht größer, als 2 Rechte sind. Diese Sinusse fallen alle deswegen auf einerley Seite des Durchmessers, z. E. in Fig. 3 oberhalb des Durchmessers BE. Man sieht sie daher sämmtlich als positiv an.

Jeder Sinus gehört zu unendlich vielen Bogen, wie die Algebra lehret. Aber dergleichen Betrachtungen finden in den Anfangsgründen keinen Platz.

Man muß aber doch dieses wohl merken: jeder positiver Sinus gehöret zu zween Bogen, welche zusammen 180° ausmachen. In Fig. 4 gehöret der Siuns FG sowohl zum Bogen AF, als auch zum Bogē FH. Der Bogen AF übertrifft den Quadranten um so viel, als dem andern Bogen FH zu einem Quadranten fehlet. Also haben diejenigen Winkel gleiche Sinusse, deren einer die Ergänzung des andern zu 180° ist. Z. E. der Winkel von 30° und der Winkel von 150° hätten einerley Sinus. Denn 30° + 150° = 180°.

Wenn man nun auch in Fig. 3 unterhalb dem Diameter BE in den Quadranten EG die Sinusse nach G weiter fort sucht; so wachsen hier dieselben wieder in eben der Ordnung wie im ersten Quadranten. Wenn dann endlich der Endpunkt des Bogens in G fällt; so wird der Sinus vom Bogen BFEG oder von 3 Quadranten; das ist von 270° wieder der Halbmesser CG. In dem vierten Quadranten GB nehmen darauf die Sinusse in eben der Ordnung wieder ab, wie im zweyten Quadranten. Fällt endlich der Endpunkt des Bogens wieder in B, so hat man 4 Quadranten, die also den ganzen Kreis ausmachen, oder 360°, und der Sinus verschwindet gänzlich.

Da man die Sinusse von den Bogen, die oberhalb des Diameters BE fallen, und kleiner als 180° sind,

sind, positiv, oder bejahend angenommen hat; so müssen alle Sinusse, die auf die entgegen gesetzte Seite des Durchmessers oder unterhalb BE fallen, und zu den Bogen gehören, die größer als 180° sind, negativ oder verneinend werden.

Aus diesen Beobachtungen, und wenn man BF, FE, EG, GB (Fig. 3.), für den ersten, zweyten, dritten, und vierten Quadranten eines Kreises annimmt, folgt also, daß 1.) die Sinusse in den ersten beiden Quadranten positiv, in den andern beiden negativ sind; 2.) daß der Sinus von 90° oder der Sinus von einem rechten Winkel dem Halbmesser gleich ist; daß 3.) der Sinus von 270° wieder dem Halbmesser gleich ist. Nennte man also den Halbmesser r; so wäre der Sinus von 90° = + r, weil er positiv ist, der von 270° wäre aber = — r, weil er negativ wird. 4.) Daß die Sinusse des halben und des ganzen Umkreises, oder der Sinus von 180° und 360° gar keine Größe haben, oder = o sind; 5.) daß, wenn ein Sinus AD zu einem spitzigen Winkel BCA gehöret, er auch zugleich zu dem stumpfen ACE gehöret, der den ersten zu 180° ergänzet.

Man braucht den Buchstaben S, oder die Abkürzung sin, um den Sinus eines Winkels zu bezeichnen. Z. E. DA = sin BCA würde heißen, DA wäre der Sinus vom Winkel BCA.

§. 8. Zus. Wenn man Fig. 4. einen Sinus BE bis an den entgegen gesetzten Punkt der Peripherie verlängert, so ist BM eine Sehne, wovon BE die Hälfte ist. Ebenfalls ist alsdann der Bogen BH die Hälfte des Bogens BHM. Daher pflegen einige die Erklärung zu geben: der Sinus eines Bogens, oder des ihm zugehörigen Winkels ist die Hälfte einer Sehne, die zu einem doppelt so großen Bogen gehöret.

§. 9. Anm. Die Alten nannten eine Linie, die innerhalb eines Kreises gezogen wurde, eine inscriptam; die Hälfte einer solchen Sehne würde also semissis inscriptae seyn. Abgekürzt könnte dieses s. ins. geschrieben worden seyn. Hr. Moutucla in Histoire des Mathemat. vermuthet, daß man diese Abkürzung irrig sinus gelesen habe, und daß auch daher die Hälfte einer Chorde, die zu einem doppelt so großen Bogen gehört, sinus genannt worden sey.

§. 10. Erkl. Da der Halbmesser die größte halbe Sehne ist, und da dieser Halbmesser der Sinus von einem rechten Winkel oder von 90° ist (§. 7.), der also der größte Sinus seyn muß; so ist derselbe zum Maaßstabe der übrigen angenommen, und Sinus totus genannt worden. Man pflegt ihn durch R oder durch Sin. tot. zu bezeichnen.

(§. 11.

§. 11. Erkl. Derjenige Theil, den man zu einem Bogen, der noch nicht 90° beträgt, hinzuthun muß, damit er 90° ausmache, wird die Ergänzung (complementum) genannt. Auch ein spitziger Winkel, den man zu einem andern spitzigen hinzuthun muß, damit beyde zusammen 90° ausmachen, heißt der Ergänzungswinkel (angulus complementi). Der Sinus eines Ergänzungswinkels, also auch der Sinus eines Ergänzungsbogens wird der Cosinus genannt; und man schreibt abgekürzt dafür Cos. In Fig. 3 ist BAF ein Quadrant, also BCF ein rechter Winkel. Der Bogen AF muß zu BA hinzugesetzt werden, damit letzterer ein Quadrant wird; AF ist daher der Ergänzungsbogen zu BA. Der Winkel ACF ist also auch der Ergänzungswinkel zu BCA. Es ist nun AD = sin BCA; also A m = cos BCA oder = sin ACF. Da aber auch der Winkel BCA, des Winkels ACF Ergänzungswinkel ist; so wäre A m = sin ACF und AD = sin BCA = cos ACF.

Ueberhaupt, wenn man zween Winkel A und B nennet, die einander ergänzen; so ist sin A = cos B, und sin B = cos A.

§. 12. Zus. Es ist von selbst klar, daß wenn ein Winkel bekannt ist, man auch seinen Ergänzungswinkel finden könne. Man müßte nämlich den ge-

gebenen von 90° abziehen, so fände man den andern, der den ersten ergänzt. Auch ist leicht einzusehen, daß allemal in einem rechtwinkelichten Dreyecke die beiden spitzigen Winkel Ergänzungswinkel von einander sind. Denn beide betragen zusammen 90°.

§. 13. Zus. Wenn man in Fig. 3. den Bogen AB im Anfange = 0 setzt, so ist der Ergänzungsbogen = 90°; folglich wäre in dem Falle, wenn der Punkt A mit B zusammenfiele, oder der Bogen AB = 0 wäre, der Cosinus dem Halbmesser gleich. Wenn man aber nachgehends den Bogen AB wachsen läßt, und immer größer nimmt, so wird die Ergänzung AF immer kleiner; wie also der Sinus von AB wächst, so nimmt der Cosinus ab. Wenn endlich der Bogen BA ein Quadrant wird, wie z. E. BF; so findet keine Ergänzung mehr statt; und es ist also der Cosinus von einem Quadranten, oder 90° = 0.

Wächst aber der Bogen AB so sehr, daß er in den zweyten Quadranten übergehet, wie z. E. BAFM, so wäre dieses Bogens Sinus MN, und sein Cosinus Mn. Je größer man aber den Bogen annimmt, um desto mehr wachsen auch im zweyten Quadranten die Cosinusse. Der Cosinus wird endlich dem Halbmesser wieder gleich, wenn der Bogen 180° enthält;

In

In dem ersten Quadranten BF fallen die Cosinusse alle auf eine Seite des Durchmessers FG, welche der im zweyten Quadranten entgegen gesetzt ist. Wenn also die Cosinusse der Bogen in den ersten Quadranten, und der von denselben gemessenen spitzigen Winkeln als positiv angenommen worden; so muß man die Cosinusse der Bogen, welche größer als 90° sind, und welche zu stumpfen Winkeln gehören, als negativ annehmen.

Wird der Bogen größer als 180°, und gehet er folglich bis in den dritten Quadranten hinein, nach G zu; so nimmt sein Cosinus in der Ordnung wie im ersten Quadranten immer mehr ab, je größer man den Bogen macht; er bleibt aber beständig in diesem dritten Quadranten negativ, bis der Cosinus endlich ganz verschwindet, wenn der Entpunkt des Bogens in G hineinfällt, oder der Bogen 270° enthält.

Hingegen fangen in dem vierten Quadranten die Cosinusse wieder an zu wachsen, und werden positiv. Wenn der Punkt A zuletzt nach B wieder zurückkömmt, und also der ganze Kreis geendiget ist, so wird der Cosinus wieder dem Halbmesser gleich.

§. 14. Zus. In Fig. 3 ist ADCm ein Parallelogram, und folglich Am = DC, und AD = mC.

Da nun Am der Cosinus des Winkels BCA war; so ist auch DC der Cosinus des genannten Winkels. Ueberhaupt ist jedesmal der Cosinus derjenige Theil des Halbmessers, der sich zwischen dem Sinus, und dem Mittelpunkte des Kreises befindet.

§. 15. Erkl. Der Unterscheid BD (Fig. 3.) zwischen dem Halbmesser BC und dem Cosinus eines Winkels DC, heißt der Quersinus (sinus versus, sagitta). Wir werden den Quersinus im folgenden nicht nöthig haben; daher halten wir uns auch nicht dabey auf.

§. 16. Erkl. Wenn man an die Endpunkte eines Bogens AB (Fig. 5.) aus dem Mittelpunkte C Halbmesser ziehet, AC, CB auf dem Endpunkte des einen Halbmessers wie AC, eine senkrechte Linie AD aufrichtet, den andern Halbmesser BC aber so lange verlängert, bis er die senkrechte Linie schneidet; so wird die dadurch bestimmte senkrechte Linie AD die Tangente; der Halbmesser BC aber, welcher verlängert die Tangente schneidet, die Secante des Bogens AB oder des Winkels ACB genannt. Die Tangente dE des Winkels BCE, welcher den andern ACB zu 90° ergänzet, wird die Cotangente des Winkels ACB genannt, Cd aber die Cosecante.

Tangenten, Secanten, Cotangenten, Cosecanten werden durch tang, sec, cot, cosec. angedeutet.

§. 17. Zus. Wenn der Bogen im Anfange = 0 ist; so ist die Tangente auch = 0. Wenn man aber den Bogen AB erstlich klein, und dann immer größer annimmt, so wird die Tangente dadurch auch immer größer.

Wenn der Bogen AB und folglich der Winkel ACB=45° oder=$\frac{1}{2}$ rechten Winkel wird; so ist die Tangente AD dem Halbmesser gleich. Denn in diesem Falle, da der Winkel ACD = 45° ist, hat auch ADC 45°, und ist also AC = AD. Da AC der Halbmesser ist; so ist auch AD dem Halbmesser gleich.

Nimmt man den Bogen AB größer, als 45°; so wird auch die Tangente größer, als der Halbmesser; und je größer immer der Bogen wird, desto stärker wächst die Tangente. Wird endlich der Bogen AB ein Quadrant, so ist die Tangente nicht mehr zu bestimmen. Denn sowohl die Tangente AD, als die Secante EC stünden senkrecht auf dem Halbmesser, und liefen also parallel immer fort, daß die Secante also niemals die Tangente schneiden könnte. Die Mathematiker pflegen dieses auszudrücken: die Tangente von 90° oder einem rechten Winkel ist unendlich groß. Es ist nämlich der Punkt D, wo sich

die Tangente endigen sollte, nirgends anzutreffen, und man kann keine Größe für die Tangente angeben, die nicht zu klein wäre.

Im zweyten Quadranten, wenn man den Bogen Ab größer als 90° annimmt, läßt sich keine Tangente für einen solchen Bogen oberhalb des Durchmessers AM angeben. Denn Cb kann die Tangente AD gegen D hinaus nicht schneiden. Verlängert man aber Cb unterhalb des Durchmessers, ingleichen auch AD, so schneiden endlich beide im Punkte F, und AF wird die Tangente des Bogens Ab.

Weil also im ersten Quadranten AE alle Tangenten oberhalb des Durchmessers fallen; so können selbige als positiv angenommen werden. Dadurch werden alsdann alle Tangenten der Bogen, welche größer als 90° sind, oder der Winkel, welcher größer als ein rechter ist, negativ.

Man sieht auch leicht, daß die Tangenten von Winkeln, die größer als 90° sind, anfänglich sehr groß sind; so aber, wie der Winkel wächst, und b sich von E entfernt, werden die Tangenten immer kleiner. Endlich wenn b in M fällt, und der Winkel zweenen Rechten gleichet, verschwindet die Tangente gänzlich.

Die Tangenten von einem spitzigen und stum-

pfen Winkel, welche Winkel zusammen 180° ausmachen, sind einander gleich, nur daß die erste positiv, die andere negativ ist. Es zeiget sich folgendergestalt. Es sey zu erweisen, daß der Bogen AB, und BbM gleiche Tangenten haben. Weil AE und EM Quadranten sind, so ist AE = EM, oder AB + BE = Eb + bM. Man mache EB = Eb, und subtrahire gleiches von gleichem, so bleibt AB = bM. Da auch bM = AP, so ist AB = AP, und also auch AD = AF.

Weil BbM der gegebene Bogen war, welcher = Mb + bE + EB und bM = AB vermöge des Erwiesenen; so ist AB + bE + EB oder der Bogen AEb = BbM. Vom Bogen AEb ist die Tangente AF, und also auch von BbM. Da AF aber = AD, und AD die Tangente vom spitzigen Winkel ACD ist, der mit dem BCM zusammen 180° ausmacht; so haben beide gleiche Tangenten, nur daß selbige nach entgegen gesetzten Richtungen liegen, und wenn also die erste positiv ist, die andere negativ wird.

Will man Bogen und Winkel betrachten, die größer als 180° sind, so wird man finden, daß die Tangenten im dritten Quadranten wieder mit ihrem Bogen wachsen, und positiv werden, bis dann die Tangente von 270° unendlich groß wird. Im vierten Quadranten nehmen die Tangenten wieder

ab,

ab, und werden verneinend bis zu letzt tang 360° = o wird.

Die Secanten wachsen und nehmen zugleich mit der Tangente wieder ab. Wird die Tangente unendlich groß, so wird auch die Secante unendlich. Wenn die Tangente verschwindet oder = o ist; so ist die Secante dem Halbmesser gleich, und kann niemals kleiner als der Halbmesser seyn.

Was noch vom Wachsen und Abnehmen der Cotangenten und Cosecanten zu sagen wäre, übergehe ich. Es ist auch von selbst leicht einzusehen. Man darf nur den Punkt B durch alle 4 Quadranten durchführen, und alsdann der vorhergehenden Lehren sich zurück erinnern. Uebrigens haben die Cotangenten in ihren verschiedenen Quadranten einerley Zeichen mit dem Tangenten. Sie sind im ersten und dritten Quadranten positiv, im zweyten und vierten negativ.

§. 18. Lehrs. Die Sinus, die Tangenten, und Secanten und überhaupt alle im vorhergehenden erklärte trigonometrische Linien solcher Bogen, welche aus der Spitze eines Winkels innerhalb seiner Schenkel beschrieben werden, haben gegen die Halbmesser dieser Bogen einerley Verhältniß.

Es seyen in Fig. 6 aus der Spitze C des Winkels BCA mit den Halbmessern CB, Cb, die Bogen Ba, bd beschrieben worden; so ist zu erweisen, daß sin Ba : BC = sin bd : bC; daß tang Ba : BC = tang bd : bC; daß sec Ba : BC = sec bd : bC u. s. w.

Bew. Die Dreyecke Ced, Cba, CBA sind einander ähnlich, weil bey e, b, B rechte Winkel sind, und überdas der C allen dreyen gemein ist. Also ist Ca : ab = Cd : de. Da Ca = BC und ab = sin Ba, Cd = bC, und de = sin db; so wird die Proportion BC : sin Ba = bC : sin bd; oder sin Ba : BC = sin bd : bC. Es ist 2.) in den Dreyecken BC : BA = bC : ba. Nun ist BA = tang Ba, und ba = tang bd. Also BC : tang Ba = bC : tang bd; oder tang Ba : Bc = tang bd : bC. Es ist 3.) in den Dreyecken CA : CB = Ca : bC. Da CA = sec Ba und Ca = sec bd ist; so ist sec Ba : BC = sec bd : bc. Auf ähnliche Art läßt sich von den übrigen trigonometrischen Linien erweisen, daß sich selbige bey ähnchen Bogen wie die Halbmesser verhalten.

§. 19. Zus. Wenn man die Halbmesser CB, Cb (Fig. 6.) in gleich viele Theile theilet, die alsdann, wie sich schon von selbst verstehet, bey dem größern Halbmesser CB größer, bey dem kleinern Halbmesser Cb kleiner werden; so bekömmt nach dem

vor-

vorhergehenden Lehrsatze jede trigonometrische Linie z. E. Sinus und Tangente, die zu dem Bogen aB gehöret, eben so viel Theile von dem Halbmesser BC, als die gleichnamigen Linien, die zu dem Bogen bd gehören, vom Halbmesser bC bekommen. Das Verhältniß jeder dieser trigonometrischen Linien gegen den ihr zugehörigen Halbmesser, kömmt bloß auf die Größe des Winkels BCA an, dessen Maaß sowohl der Bogen aB, als auch der bd ist. Man theile z. B. jeden Halbmesser in hundert gleiche Theile, so wird der Sinus von 30° allemal 50 bekommen; das ist, wenn BCA = 30°, so erhält ab 50 Theile, dergleichen BC 100 hat, und de 50 Theile, dergleichen eC 100 hat. Denn, wenn (Fig. 5.) BCP ein gleichseitiges Dreyeck ist, oder BP die Seite eines regulären Sechsecks, so ist der Winkel PCB = 60°, und CB oder der Halbmesser = BP. Nun theile man den Winkel in zween gleiche Theile; so wird ABC = 30°, und BQ oder der Sinus des Winkels ACB = $\frac{1}{2}$ BP. Folglich wenn der Halbmesser BC = BP in 100 Theile eingetheilt wird, bekömmt BQ der Sinus von 30° solcher Theile 50.

§. 20. Anm. Man hat den Halbmesser in den gewöhnlichen Tafeln in 10000000 und in den größern in 1000000000 Theile getheilt, und durch mühesame Rechnung gesucht, wie viel solcher Theile die Sinus, Tangenten, Secanten der spitzigen Winkel bekom-

bekommen. Für die stumpfe hat man nicht nöthig gehabt, die Sinus zu berechnen, weil sie eben die Sinus, Secanten, Tangenten haben, als die spitzigen, die mit ihnen 180° ausmachen. Die Arten aber, wie diese Rechnungen können bewerkstelliget werden, sind zu weitläufig, als daß sie hier könnten gelehrt werden. Man findet sie in Joach. Rhetici und Valentini Othonis opere palatino de triangulis; in Stekins Cosmographie; Gellibrands Trigonometria Britannica; Ozanam Tables des sinus; Wolfs Element. Trig. latin. Die Algebra aber, und die Rechnung des Unendlichen zeigen Vortheile, und geben Vorschriften, wie diese Tafeln hätten leichter können berechnet werden. Eben die Analysis setzet uns in Stand, die Möglichkeit solcher Tafeln allgemeiner zu übersehen, ihre Zahlen zu prüfen, und sie zu allerley weiterm Gebrauche anzuwenden. Damit man aber sehe, daß nichts unmögliches gefodert werde; so mögen folgende Beyspiele dazu dienen, um einzusehen, wie Sinus, Tangenten, Secanten haben berechnet werden können.

§. 21. Anm. Wenn man dem Halbmesser 10000000 Theile giebt, so bekömmt der Sinus von 30° die Hälfte davon, oder 5000000 (§.20.) aus dem Sinus läßt sich aber der Cosinus finden, wenn man das Quadrat des Sinns von dem Quadrate des Halbmessers subtrahirt, und aus dem Reste die Qua-

drat-

dratwurzel ziehet. Denn in Fig. 7. im rechtwinkelichten Dreyecke BQC ist $BC^2 = BQ^2 + QC^2$, und $BC^2 - BQ^2 = QC^2$, folglich $\sqrt{(BC^2 - BQ^2)} = QC$, das der Cosinus von 30° oder der Sinus von 60° ist. Weil nun QC bekannt ist; so darf man selbigen vom Halbmesser AC subtrahiren, so bleibt AQ oder der Querrsinus übrig.

Aus dem Sinus und Querrsinus eines Winkels läßt sich der Sinus eines andern Winkels finden, der halb so groß als der vorige ist. Man muß das Quadrat des Sinus zu dem Quadrate des Querrsinus addiren, aus dieser Summe die Quadratwurzel ziehen, und davon die Hälfte nehmen. Denn wenn man die Sehne AB ziehet; so ist wieder $AB^2 = BQ^2 + AQ^2$, und $AB = \sqrt{(BQ^2 + AQ^2)}$, und $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2}\sqrt{(BQ^2 + AQ^2)}$. Nun würde aber $\frac{1}{2}$ AB der Sinus des Winkels $DCB = \frac{1}{2} ACB$ seyn, und folglich, da ACB = 30°, der Sinus von 15° seyn. Solchergestalt könnte man ferner den Sinus von der Hälfte des vorigen Winkels von $7\frac{1}{2}$° oder von 7° 30′ u. s. w. finden.

Den Sinus des Winkels von 45° könnte man finden, wenn man das Quadrat des Halbmessers durch 2 multiplicirt, aus diesem Producte die Quadratwurzel ziehet, und davon die Hälfte nimmt.

Denn

Denn es sey jezt (fig. 7.) der Bogen BAP = 90°, und BP die Seite eines Quadrats, das sich im Zirkel beschreiben läßt. Man theile den Bogen BAP, und folglich auch den Winkel BCP in zween gleiche Theile, so wird der Bogen BA, oder der Winkel ACB = 45°, BQ = $\frac{1}{2}$ BP wird = sin ACB = sin 45°. Weil nun der Bogen PAB oder der Winkel BCP = 90° angenommen worden, so ist PCB ein rechtwinkelichtes Dreyeck, und $BP^2 = BC^2 + CP^2$, oder $BC^2 = CP^2$ (weil BC = CP als Halbmesser.). Folglich $BP^2 = 2 BC^2$. Wenn man beiderseits die Wurzel ausziehet; so wird $BP = \sqrt{2 BC^2}$, und $\frac{1}{2} BP = \frac{1}{2} \sqrt{2 BC^2}$. Es ist aber $\frac{1}{2}$ BP = BQ. Folglich $BQ = \frac{1}{2} \sqrt{2 BC^2}$. Es ist aber vorher gezeigt worden, daß BQ = sin 45°; hiemit $\sin 45° = \frac{1}{2} \sqrt{2 BC^2}$.

Aus dem Sinus von 45° könnte man wieder nach den vorhergehenden Sätzen, den von 22°30′; aus diesem wieder den Sinus von 11°15′ u. s. w. finden.

Dieses, was hier von Berechnung der Sinusse gesagt worden, läßt sich leicht aus den geometrischen Sätzen begreifen. Es wird dieses genug seyn, um nur einigermassen die Möglichkeit zu zeigen, wie die Sinusse der Winkel haben können gefunden, und berechnet werden.

Sind die Sinusse der Winkel gefunden; so lassen sich auch die Tangenten bestimmen. Man findet die Tangente eines Winkels, wenn man seinen Sinus, durch den Sinus totus, d. ist, durch den Halbmesser multiplicirt, und das Produkt durch seinen Cosinus dividirt. Es ist nämlich (fig. 5.) CQ : QB = CA : AD. Nun ist CQ = Cos ACD; QB = sin ACD; CA = sin tot; AD = tang ACD. Also Cos ACD : sin ACD = sin tot : tang ACD. Wären also die drey ersten bekannt; so fände man das vierte Glied oder tang ACD $= \frac{\text{sin ACD} \times \text{sin tot}}{\text{Cos ACD}}$.

Aus der Tangente endlich findet sich auch die Secante, wenn man die Tangente durch den Halbmesser multiplicirt, und das Produkt durch den Sinus dividirt. Es ist wieder (fig. 5.) BQ : BC = AD : DC. Da BQ = sin ACD; BC = sin tot; AD = tang ACD, und DC = sec ACD; so wird sin ACD: sin tot = tang ACD : sec ACD. Folglich, wenn wieder die drey ersten Glieder der Proportion bekannt sind, wird das vierte, oder sec ACD = $\frac{\text{sin tot} \times \text{tang ACD}}{\text{sin ACD}}$.

§. 22. Anm. Es ist noch übrig, daß der Gebrauch der Tafeln erkläret werde. Wie schon oben ist gesagt worden, so hat man in den größern Tafeln

feln den Sinus totus oder Halbmesser = 10000000000 angenommen, und in solchen Theilen alle Linien, die natürlichen Sinus berechnet. Von obigem Halbmesser ist aber der Logarithmus = 10.0000000000, und die für die natürlichen Sinus berechneten Logarithmen werden alsdann die künstlichen Sinus, und sind zu trigonometrischem Gebrauche sehr bequem. In den gewöhnlichen kleinen Tafeln aber hat man die drey letzten Zifern der trigonometrischen Linien weggelassen; das heißt: man hat sie für den Halbmesser 10000000 mitgetheilt; doch sind die Logarithmen umgeändert beybehalten worden. Folglich sind die Kennzifern der Logarithmen für die Zahlen, neben denen sie stehen, alle um 3 Einheiten zu groß, weil sie eigentlich die Logarithmen solcher Zahlen sind, die 3 Zifern mehr enthalten. Doch verursachet dieses im Gebrauche keinen Fehler, weil da mit den Logarithmen allein gerechnet wird, und man sich der Zahlen, welche die Sinus und Tangenten ausdrücken, nicht bedienet. Man würde in Irrthum können geführt werden, wenn man die Logarithmen als Logarithmen der neben ihnen stehenden Zahlen ansehen wollte.

Die Tafeln sind nun so eingerichtet, daß die Bogen, welche zusammen 90° betragen, beysammen stehen. Diese Einrichtung verursacht, daß Anfang und Ende beide vorne beysammen, und die Mitte

und die Mitte auf den letztern Blättern stehet. Z. E. auf der ersten Seite stehet 0°, und gerade gegenüber stehet 89°60′, das giebt 90°. Am Ende des Buchs stehet auf der einen Seite 44°60′, und auf der andern gerade gegenüber 45°; beide zusammen betragen wieder 90°. Aber eben diese Einrichtung, daß die Bogen unter 45°, und ihre Ergänzungen zu 90° beysammen stehen, verschafft eine große Bequemlichkeit; denn der Sinus des gegenüberstehenden Bogens ist allemal der Cosinus des ersten; und umgekehrt. Oder wenn man die Logarithmen nimmt; so ist der eine Logarithme des Sinus, und der gegenüberstehende auf der andern Seite der Logarithme des Cosinus, und umgekehrt. Eben dieses gilt vom Tangenten und Contangenten. Man verlange z. E. den Cosinus von 36°17′, so dürfte man nur diesen Winkel oder Bogen aufsuchen, und den Sinus des Winkels auf der andern Seite in eben der Zeile nehmen, wo dann 53°43′ stehet, das die Ergänzung des ersten zu 90° ist.

Den Sinus totus oder Radius findet man in den Tabellen, wenn man den Sinus von 90° oder 89° 60′ aufsucht.

Weil stumpfe Winkel und spitzige, die zusammen 180° betragen, einerley Sinus und Tangenten haben; so findet man den Sinus eines stumpfen Winkels,

wenn

wenn man ihn von 180° abziehet, und von dem Ueberreste den Sinus sucht. Man wollte z. B den Sinus von 115°; so wäre 180° — 115° = 65°, wovon man den Sinus dann in den Tabellen findet. Das gesagte erstreckt sich auch auf Tangenten und Secanten.

Nach den logarithmischen Tabellen der Sinus und Tangenten findet man die Logarithmen der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen. Es werden diese Logarithmen gebraucht, wenn eine gerade Linie, wie z. E. die Seite eines Dreyecks in Zalen gegeben ist, die mit in der Rechnung vorkömmt. Ihr eigentlicher Gebrauch wird im folgenden noch mehr erhellen.

Was die Tabellen selbst anbetrifft, so wird unter den kleinern Ausgaben die Vlacquische, welche zu Haag 1665. herausgekommen, weil sie die wenigsten Druckfehler enthält, für die beste gehalten. Doch ist die wolfische Edition auch gut zum Gebrauche Man müßte sie, wenn man sicher gehen will, mit einer correcten Ausgabe zusammenhalten, und die eingeschlichenen Druckfehler verbessern. Unter den größern Tabellen behaupten die, welche Gardiner 1742 im Quart zu London herausgegeben hat, den Vorzug. Man findet darinn zugleich die Logarithmen der ganzen Zahlen von 1 bis 102100. Es hatten sich aber diese Tabellen schon selten gemacht, und stehen

daher in einem hohen Preis. Dadurch wurde ein Gelehrter zu Avignon bewogen, eine neue Auflage im Jahre 1770. zu veranstalten, sie mit Zusätzen zu vermehren, und die englische Anleitung zum Gebrauche derselben in das Französische zu übersetzen. In den astronomischen Schriften des Hrn. Hofr. Kästner findet man manche seltene Nachrichten von trigonometrischen Tafeln.

§. 23. Anm. Wie Iac. Bernoulli in op. T. II. Kästner in Trigon. S. 358. und Clemm §. 774. zeigen, ist es falsch, wenn insgemein in den Tafeln die Logarithmen vom Sinus und der Tangente des Bogens 0, auch 0 angegeben werden. Der Sinus totus, die Tangente von 45° und ihre Logarithmen, ingleichen der Sinus von 30°, ferner die Logarithmen der gemeinen Zahlen 1. 10. 100. 1000. 10000, diese 10 Zahlen sind vollkommen richtig in den Tabellen, weil es Nationalzahlen sind. Nun stehen in den Tabellen 90 × 60 Sinus, eben so viel Tangenten, und für beide die Logarithmen, das ist 90 × 60 × 4 = 21600 Zahlen, und wenn man die Logarithmen von den 10000 gemeinen Zahlen dazu setzt; so enthalten sie 31600. Wenn man die übrigen 10 völlig wahren Sätze wegnimmt; so bleiben 31590, die alle nur beynahe wahr sind.„ Und auf ihnen, sagt Kästner, beruhet gleichwohl die Aus-

messung

messung des Himmels und der Erden, und fast die ganze angewandte Mathematik. So richtig ist es, daß wir in unsern sichersten und erhabensten Kenntnissen uns der Wahrheit nur nähern, ohne sie völlig zu erreichen. „

II. Abschnitt.

Von den rechtwinkelichten Dreyecken und deren Ausrechnung.

§. 24. Aufg. In einem rechtwinkelichten Dreyecke ABC (fig. 8.) aus der Hypothenuse AC und einer anliegenden Seite AB die schiefen Winkel zu finden.

Aufl. und Beweis. Es ist kein Zweifel, daß in dem Dreyecke sich $AC : AB = AC : AB$ verhält. Wenn man nun mit CA einen Kreis beschreibet; so ist $CA = \sin tot$, nnd $AB = \sin C$. Folglich $CA : AB = \sin tot : \sin C$. Man könnte also den sin C und folglich den ihm zugehörigen Winkel finden, weil die drey ersten Glieder der Proportion bekannt sind. Es wäre nämlich $\sin C = \frac{AB \times \sin tot}{CA}$. Und wenn man die Logarithmen gebraucht, $\log \sin C = \log AB + \log \sin tot - \log CA$.

Exempel. Es sey AB = 3014″ und CA = 3916″, so ist log sin C = log 3014 + log sin tot — log 3916.

$$\begin{array}{rl} \log 3014 = & 3.4791432 \\ \log \sin tot = & 10.0000000 \\ \hline \log 3014 = \log \sin tot = & 13.4791432 \\ \log 3916 = & 3.5928427 \\ \hline l\,3014 + l \sin tot - l\,3916 = & 9.8863005 = \log \sin C. \end{array}$$

Sucht man diesen Logarithme nun unter den Logarithmen der Sinusse; so findet man, daß der log sin 50° 19′ = 98862568 dem obigen am nächsten komme, woraus man schließt, daß der Winkel C = 50° 19′. Der andere Winkel A ist also = 39° 41′.

Weil das gegebene Dreyeck ABC rechtwinkelicht war; so gehört allerdings der gefundene Sinus zu einem spitzigen Winkel; weil kein stumpfer Winkel in einem solchen Dreyecke seyn kann. In andern Fällen müßte man schließen: entweder gehöret der Sinus zu dem spitzigen Winkel, der in den Tafeln stehet, oder zu dem stumpfen, der mit ersterm 180° ausmacht (§. 7.). Die Umstände müßen alsdann entscheiden, ob der spitzige, oder stumpfe Winkel zu nehmen sey.

§. 25.

§. 25. Zus. Weil AB = sin C, und folglich = Cos A hier ist; so hätte man auch schließen können CA : CB = sin tot : Cos A.

§. 26. Zus. Wenn man nur darauf acht hat, was die bekannten Dinge, und was das Gesuchte in einem Dreyecke sind, und sie so in Ordnung stellet, daß das Gesuchte das vierte Glied der Proportion wird; so werden die Aufgaben, die bey den rechtwinkelichten Dreyecken vorkommen, leicht aufzulösen seyn. Es sey jetzt die dritte Seite BC im rechtwinkelichten Dreyecke ABC zu finden; so ist AC : CB = AC : CB. Nun ist AC = sin tot, CB = Cos C. Also sin tot : Cos C = AC : CB. Die drey ersten Glieder sind bekannt. Folglich findet man CB = $\frac{\text{Cos C} \times \text{AC}}{\text{sin tot}}$, oder logarithmisch log CB = log Cos C + log AC — log sin tot.

log sin 39°41′	=	log Cos C =	9.8051908
log 3916	=	log AC =	3.5928427
			13.3980335
		log sin tot =	10.0000000
		log CB =	3.3980335

Sucht man den Logarithmus CB unter den Logarithmen der gemeinen Zahlen auf; so findet man,

daß ihm log 2500 = 3.3979400 am nächsten komme, daß also CB = 2500.

Man hätte auch CB aus den gegebenen Seiten AB, CB durch die Geometrie, vermittetst des pythagorischen Satzes finden können. Es ist nämlich $CA^2 = AB^2 + CB^2$; $CA^2 - AB^2 = CB^2$: und $\sqrt{(CA^2 - AB^2)} = CB$.

§. 27. Zus. Für log sin C wurde in §. 25 der aus den Tafeln genommen, welcher dem log sin C am nächsten kam, und zwar der nächst kleinere; dadurch muß aber den Winkel C um etwas zu klein, und folglich sein Ergänznngswinkel A etwas zu groß werden. Da auch im §. 27. durch des Winkels A seinen Sinus die Seite BC gesucht wurde; so wäre es nicht Wunder, wenn BC gesucht wurde; so wäre es nicht Wunder, wenn BC um etwas zu groß gefunden wurde. In unserm Falle ist nun der Fehler gar nicht merklich; wie man dieses finden kann, wenn BC durch den pythagorischen Satz ebenfalls gesucht wird. Weil man nun selten in trigonometrischen Rechnungen die Logarithmen der Winkel so findet, wie sie in den Tabellen stehen; so ist offenbar, daß man kleine Fehler begehen kann, wenn man die Logarithmen der Winkel, welche in den Tabellen dem gesuchten am nächsten kommen, für die wahren annimmt, und daraus weiter rechnet. Absicht

und

und Umstände müssen entscheiden, ob die Fehler beträchtlich werden, oder nicht. Es erhellet aber auch dieses aus dem Gesagten, daß zu genauer Bestimmung sehr zuträglich sey, wenn man, wo es geschehen kann, Linien aus Linien sucht, ohne die Winkel zu gebrauchen.

§. 28. Zus. Um die kleinen Fehler, deren im vorhergehenden Zusatze gedacht worden, noch mehr zu verringern, dienet folgendes. Man hätte nämlich zu dem Winkel C durch eine etwas beschwerlichere Rechnung noch Secunden, und folglich den Winkel genauer finden können. Man setzt da voraus (das aber in größter Schärfe nicht richtig ist) daß von einer Minute zur folgenden die Logarithmen in einerley Verhältniß mit den Bogen wachsen.

Es ist z. E. log sin 50°20′ = 98863616
log sin 50°19′ = 98862568

1048

Da der Bogen hier um 1′ oder 60″ gewachsen ist; so hat der Logarithmus um 1048 zugenommen. Nun war (§. 25.)

log sin = 98863005

der nächst kleinere oder log sin 50° 19′ = 98862568

437

Nur

Nun schließt man, wie sich der Unterschied der Logarithmen, die um 1′ oder 60″ unterschieden sind, zu ihren zugehörigen Bogen 1′ = 60″ verhalten; so verhält sich der der Unterschied des gefundenen und nächst kleinern Logarithmen zu dem ihm gehörigen Bogen. Das heißt in unserm Falle: 1048 geben 60″, was geben 437, wodurch das vierte Glied = 25″ erhalten wird. Man findet also den Winkel C = 50° 19′ 25″.

Wenn umgekehrt zu dem gegebenen Winkel 50° 19′25″ ein Logarithme gesucht werden sollte; so nimt man einen Logarithmen aus den Tafeln, deren einer größer, der andere kleiner als der gegebene ist, die wären z. E. hier log sin 50° 20 und log sin 50 19′ und bemerkt ihren Unterschied; alsdann schließt man: 60″ geben 1048, was geben 25″, nämlich es wird das vierte Glied = 437. Wenn man diese 437 zu den Logarithmen sin 50° 19′ hinzuaddirt; so bekömmt man den verlangten von 50° 19′ 25″. Doch, wie gesagt, trifft dieses Verfahren nur beynahe zu.

§. 29. Aufg. Aus den beiden Seiten GF, FD (fig. 9.), die den rechten Winkel einschließen, die Winkel in einem rechtwinkelichten Dreyecke DFG zu finden.

Aufl.

Aufl. u. Bew. Man nehme eine der gegebenen Seiten, die den rechten Winkel einschließen, für den Halbmesser an; so ist FG = sin tot, FD = tang G. Also FG : FD = FG : FD; das ist FG : FD = sin tot : tang G. Und da die drey ersten bekannt sind, so wird tang $G = \frac{FD \times \text{sin tot}}{FG}$; oder durch Logarithmen log tang G = log FD + log sin tot — log FG.

Exempel. Es sey FD = 4'; FG = 3', so ist

log FD = log 4	=	7.0657860
log sin tot	=	10.0000000
		17 0657860
log FG = log 3	=	6.9408473
log tang G	=	10.1249387

Es kömmt aber diesem Logarithmen der log tang 53° 7' = 10 1247266 am nächsten. Der andere Winkel D wäre nun 36° 53'.

§. 30. Zus. Die Hypothenuse DG könnte 1) geometrisch gefunden werden, da nämlich DF² + FG² = DG² ist, so wird (DF² + FG²) = DG; 2) trigonometrisch durch die Proportion FG : GD = sin tot : sec G. Man trifft aber nicht in allen

Ta-

Tafeln die Secanten an, und noch seltener findet man ihre Logarithmen. Man brauche also 3) diese Proportion, wenn man keine Tafeln hat, worinn Secanten und ihre Logarithmen stehen. Man nehme DG die Hypothenuse für den Halbmesser an, wie in fig. 8., so wird DF = sin G, folglich DF : DG. = DF : DG; das ist, sin G : sin tot = DF : DG. Also könnte DG aus den drey ersten bekannten Gliedern gefunden werden.

Wollte man die Seite FG in der Rechnung brauchen, so wäre FG = Cos G; und da FG : GD = FG : GD; so wäre Cos G : sin tot = FG : GD.

Es würde also logarithmisch seyn log GD = log sin tot + log FG — log Cos G.

Exempel. log sin tot = 10.0000000

log FG = log 3 = 0.4771213

10.4771213

log Cos G = log sin 36° 53′ = 0,6988342

log GD = 0,6988343

Wenn man nun in den Tafeln der gemeinen Zahlen nachschlägt; so findet man, daß der Logarithme

von

von 4 dem log GD am nächsten kömmt. Das wäre nun ein beträchtlicher Fehler, wenn man GD = 4 annähme, denn sie ist wirklich = 5. Man verfahre daher folgendergestalt. Man schlage den nämlichen Logarithmen unter einen größern Charakteristik auf; z. E. hier unter der Charakteristik 3, da ergiebt sich nun, daß log 4999 = 3.6988831 dem log GD sehr nahe komme. Damit aber aus der Charakteristik 3 die Charakteristik 0 werde, müßten 3 Einheiten weggenommen werden. Wenn aber die Kennzifer des Logarithmen um 1 abnimmt; so ist in der Algebra gezeigt worden, daß die dem Logarithmen zugehörige Zahl zehnmal kleiner werde. In obigem Beyspiel würde die Zahl 499,9 werden, wenn man aus der Kennzifer 3 die Kennzifer 2 machte. Folglich würde die Zahl zehnmal kleiner oder 49,99, wenn aus 2 die Kennzifer 1 gemacht würde. Endlich würde die Zahl 4,999, wenn aus 1 die Kennzifer 0 gemacht würde. Man sieht hieraus, daß man die einem Logarithmen zugehörige Zahl viel genauer findet, wenn man man den gegebenen Logarithmen unter einer größern Kennzifer aufsucht, und die dazu gehörige Zahl so oft um zehnmal kleiner macht, als von der Kennzifer des Logarithme Einheiten müssen abgenommen werden, damit die Kennzifer des gegebenen Logarithmens daraus werde. Uebrigens ist bekannt, daß eine Zahl zehnmal kleiner werde, wenn

man von einer gegebenen ganzen Zahl die letzte Zifer rechter Hand einen Decimalbruch bedeuten läßt; z. E. aus 235 wird 23,5, die zehnmal kleiner als erstere ist. Schneidet man noch eine Zifer vom Decimalbruche ab, so wird die Zahl abermal zehnmal kleiner. Z. E. 2,35 ist 100mal kleiner als 235 u. s. w.

Wenn man Tafeln hat, worinn Secanten anzutreffen sind, und vermittelst der Secanten die Seite GD sucht, so findet sich selbige = 4,9984374; also ist der 5 die wahre Zahl.

§. 31. Aufg. Aus der Hypothenuse AC (fig. 8.) und einem spitzigen Winkel C, die Seiten zu finden.

Aufl. u. Bew. Es ist AC : AB = AC : AB. Es ist aber AC = sin tot, AB = sin C. Also sin tot : sin C = AC : AB. Um die andere Seite BC zu finden, wäre, da BC = Cos C ist, sin tot : Cos C = AC : BC.

Exempel. Es sey AC = 3916″ und C = 39° 40′ so wäre log AB = log sin 39° 40′ = log 3916 — log sin tot.

$$\log \sin 39^\circ 40' = 9.8050385$$
$$\log 3916 = 3.5928427$$
$$13.3978812$$
$$\log \sin tot = 10.0000000$$
$$\log AB = 3.3978812$$

Diesem Logarithmus kömmt nun der Logarithmus für die Zahl 2500 am nächsten. Es hat also AB 2500″ oder 25°. Daß aber 2500 hier Zolle bedeuten, nimmt man daraus ab, weil AC in Zollen ausgedrückt ist.

Jetzt um BC zu finden, wäre sin tot : Cos 39° 40′ = 3916″ : BC. Also log BC = log Cos 39° 40 + log 3916 — log sin tot.

$$\log \cos 39^\circ 40' = 9.8863616$$
$$\log 39\ 16'' = 3.5928427$$
$$13.4792043$$
$$\log \sin tot = 10.0000000$$
$$\log BC = 3.4792043$$

Diesem Logarithmus kömmt nun der von der Zahl 3014 sehr nahe. Es ist also BC = 3014″, oder 30° 1′4″.

§. 32. Aufg. Aus einer Seite, die den rechten Winkel einschließt, FG (Fig. 9.) und einem schiefen Winkel G, die andere Seite FD und die Hypothenuse DG zu finden.

Aufl. und Bew. Es ist FG = sin tot, und FD = tang G. Da nun FG : FD = FG : FD; so wird sin tot : tang G = FG : FD. Man kann also FD aus den ersten drey bekannten Gliedern der Proportion finden.

Um die Hypothenuse DG zu finden, wäre FD : DG = FD : DG; und da FD = tang G, und DG = sec G; so ist tang G : sec G = FD : FG. Da aber, wie schon bemerkt worden ist, die Secanten und ihre Logarithmen nicht in allen Tafeln angetroffen worden; so verfahre man folgendergestalt. Man nehme die Hypothenuse DG für den Halbmesser an; so wird FD = sin G, und FG = cos G. Also FD : DG = FD : DG, und sin G : sin tot = FD : DG; oder wenn FG vorkömmt, FG : GD = FG : GD; das ist cos G : sin tot = FG : GD.

Es sey also z. E. FG = 6′ und der Winkel G = 53° 7′; so ist log FD = log tang G + log FG — log sin tot.

log

$$\log \tan 53° 7' = 10.1247266$$
$$\log 6' = 0.7781513$$

$$10.9028779$$
$$\log \sin tot = 10.0000000$$

$$\log FD = 0.9028779$$

welchem Logarithmen in den Tafeln der von 8′ nahe kömmt. Es wäre demnach FD = 8′.

Um DG zu finden, wäre log DG = log sin tot + log FD — log sin G.

$$\log \sin tot = 10.0000000$$
$$\log 8' = 0.9030900$$

$$10.9030900$$
$$\log \sin 53° 7' = 9.9030136$$

$$\log DG = 1.0000764$$

Diesem Log. kömmt in den Tafeln der von 10′ am nächsten. Es ist auch in der That nach dem pythagorischen Satze $10^2 = 8^2 + 6^2$; oder 100 = 64 + 36. Daher sind diese Seiten die wahren.

§. 33. Zus. Wenn (Fig. 9.) FG und der Winkel D gegeben wären; so ließe sich doch DF nach der gegebenen Regel finden. Denn es ist G = 90°

— D. Auch hätte man in der vorigen Aufgabe, um FD zu finden, DG für den Halbmesser nehmen und schließen können: cos. G : sin G = FG : FD. Allein, wo es angehet, vermeidet man gerne dergleichen Proportionen, und bedienet sich vielmehr solcher, worin der Halbmesser oder Sinus totus vorkömmt. Denn man mag Zahlen oder Logarithmen gebrauchen; so wird dadurch die Rechnung verkürzt.

III. Abschnitt.

Von den gleichschenkelichten Dreyecken.

§. 34. Aufg. In einem gleichschenkelichten Dreyecke ABC (Fig. 10.) aus zwoen gegebenen Seiten die Winkel zu finden; 2.) aus einer gegebenen Seite und einem Winkel das übrige zu finden.

Aufl. und Bew. Man lasse aus der Spitze A das Perpendikel DA herab; so ist der Winkel BAD = DAC, und die Seite BD = DC = $\frac{1}{2}$ BC. Ebenfalls ist aus der Geometrie bekannt, wenn in einem gleichschenkelichten Dreyecke nur ein Winkel bekannt ist, daß man zugleich die Größe eines jeden der beiden andern finden könne. Wäre also 1.) BA und BC gegeben, so weis man auch $\frac{1}{2}$ BC = BD, und das rechtwinkelichte Dreyeck BAD ließe sich nach §.

24

24 auflösen. Man verstehet aber leicht, daß sich aus den beiden gleichen Schenkeln AB, BC nichts finden ließe; weil sie nur wie eine Seite anzusehen sind. Wäre 2.) BA und der Winkel BAC gegeben; so weis man auch $\frac{1}{2}$ BAC = BAD; und das rechtwinkelichte Dreyeck könnte nach §. 32. aufgelöset werden. Eben so läßt sich aus BC, und einem Winkel das übrige finden. Denn, da man aus BC auch $\frac{1}{2}$ BC = BD weis, so wäre zur Auflösung des Dreyecks BAD der §. 32 anzuwenden.

IV. Abschnitt.

Allgemeine Auflösung der Dreyecke.

§. 35. Lehrs. In jedem Dreyecke verhalten sich die Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel. In Fig. 11 ist AB : BC = sin C : sin A.

Bew. Durch jede drey Punkte, welche nicht in geraderLinie liegen, und folglich auch durch jede drey Spitzen eines geradelinichten Dreyecks läßt sich ein Kreis beschreiben. Es sey also um das Dreyeck ABC ein Kreis beschrieben; so ist AB : BC = AB : BC, und AB : BC = $\frac{AB}{2}$: $\frac{BC}{2}$. Es sey nun BM = $\frac{1}{2}$ AB,

 und

und BN = $\frac{1}{2}$ BC; so ist AB : BC = BM : BN. Es ist nun MC auf BM, und NC auf BN senkrecht, und daher BM = sin MCB, und BN = sin BCN. Derohalben AB : BC = sin MCB : sin BCN. Es ist aber MCB ein Winkel am Mittelpunkte des Kreises, und C ein Winkel an der Peripherie. Da nun C auf einem Bogen stehet, der doppelt so groß ist, als der, worauf MCB stehet; so ist MCB = C. Eben so ist aus dem nämlichen Grunde MCN = A. Folglich AB : BC = sin C : sin A; oder AB : sin C = BC : sin A, daß also der Satz heißt: es verhält sich eine Seite zu dem Sinus des gegenüber stehenden Winkels, wie eine andere Seite zu dem Sinus des gegenüber stehenden Winkels.

§. 36. Aufg. Aus zwoen gegebenen Seiten AB, BC und einem Winkel C, der einer dieser Seiten entgegen steht, die übrigen Winkel zu finden.

Aufl. Es wäre nach §. 35. AB : BC = sin C : sin A; also sin A = $\frac{\sin C \times BC}{AB}$; oder mit Logarithmen log sin A = log sin C + log BC — log AB. Weis man auch A, so wird der dritte Winkel B auch bekannt; und man könnte ebenfalls jetzt die Seite AC finden; wie gleich gezeigt werden wird.

Exem-

Exempel. Es sey AB = 82′, BC = 75′ und C = 64° 33′; so ist

$$\begin{array}{rl} \log \sin C = \log 64^\circ\ 33' = & 9.\ 9556688 \\ \log BC = \log 75' = & 1.\ 8750613 \\ \hline & 11\ \ 8307301 \\ \log AB = \log 82' = & 1.\ 9138138 \\ \hline \log \sin A & 9.\ 9169163 \end{array}$$

Diesem Log. kömmt der Log Sinus von 55° 40′ am nächsten, daß also A = 55° 40′.

§. 37. Zus. Da der Sinus eines spitzigen Winkels zugleich zu einem stumpfen gehört, der mit erstem 180° ausmacht; so könnte im vorigen Falle (§. 36.) der Winkel A entweder 55° 40′ oder 180° — 55° 40′, das ist 124° 20′ seyn. Man sieht also, daß in dem Falle, wo die Winkel gesucht werden, Zweydeutigkeiten statt finden. Doch kann man durch folgende Ueberlegung manchmal die Zweydeutigkeit heben. 1.) Wenn A = 124° 20′ seyn sollte; so müßte durch diesen größern Winkel eine größere Seite entgegen stehen (§. 4.). Dieß ist aber nicht: denn C ist = 64° 33′, und diesem stehet die Seite AB = 82′ entgegen. Da nun die dem Winkel A entgegen stehende Seite BC = 75′ ist; so muß A kleiner seyn als C (§. cit.). Folglich ist A = 55° 40′.

40′. 2.) Wenn A = 124° 20′, und da C = 64° 33′, so ist, wenn beide zusammen addirt werden, A + C = 188° 53′. Es sind also schon zween Winkel in einem Dreyecke größer als 180°; und doch betragen alle drey zusammen nur 180°. Es kann also A gar nicht 124° 20′ seyn, vielmehr ist es gewiß, daß A = 55° 40′.

In andern Fällen, wenn der gegebene Winkel der kleinen Seite gegenübersteht, läßt sich diese Zweydeutigkeit nicht mit Gewißheit heben. Allenfalls die besondern Umstände, die bey einer Aufgabe vorkommen, können noch eine Entscheidung geben. Es sey z. E. AB = 1711″ und BC = 2202, der Winkel C = 32°; so ist AB : sin C = BC : sin A. Also log sin A = log sin C + log BC — log AB.

log sin 32° =	9. 7242097
log 2202 =	3. 3428173
	13. 0670270
log 1711 =	3. 2332500
log sin A =	9. 8337770

Diesem Log. kömmt der Log. Sinus von 43° nahe. Es wäre also A entweder = 43° oder = 180° — 43°; das ist = 137°. Es muß also der Winkel A, da er einer größern Seite entgegen stehet, auch grö-

größer seyn, als C; aber sowohl 43° als 137° ist größer als C = 32°. Es ist also daraus nichts abzunehmen, und es bleibt unentschieden, ob A = 43° oder = 137°. Auch 2.) wenn man A und C zusammen nimmt, so wäre A + C = 137° + 32 = 169°. A kann also ein stumpfer Winkel seyn; denn die zween A + C betragen noch nicht 180°. Es ist hieraus offenbar, daß wenn nicht besondere Umstände bey der Aufgabe vorkommen, die Zweydeutigkeit nicht gehoben werden könne. Wo es angehet, thut man derowegen wohl, daß man nachforschet, ob die gesuchten Winkel spitzig oder stumpf werden.

§. 38. Aufg. Aus einer Seite AB und zweenen Winkeln die übrigen Seiten zu finden (Fig. 11.).

Aufl. Da allemal C bekannt ist, entweder unmittelbar, oder durch die beiden übrigen Winkel A und B, welche gegeben worden; so kann man schließen (§. 37.) sin C : AB = sin A : BC. Also BC $= \frac{AB \times \sin A}{\sin C}$, und log BC = log AB + log sin A — log sin C.

Es sey $A = 50° 7'$, $C = 20° 38'$, $AB = 12'$

$$\log 12' = 1.0791812$$
$$\log \sin 50° 7' = 9.8849945$$
$$\overline{}$$
$$10.9641757$$
$$\log \sin 20° 38 = 9.5470189$$
$$\overline{}$$
$$\log BC \quad 1.4171568.$$

Wenn dieser Logarithme unter der Charakteristik 3 aufgesucht wird, so findet sich $BC = 2613$. Wollte man die dritte Seite AC, wie in §. 36 verlangt wurde, so wäre ebenfalls $\sin C : AB = \sin B : AC$.

§. 39. Lehrs. In jedem Dreyecke verhält sich die Summe der beiden Schenkel oder $AC + AB$ (Fig. 12.) zu ihrem Unterschiede $AC - AB$, wie die tangente der halben Summe der Winkel, welche diesen beiden Seiten gegenüber stehen, das ist tang $\frac{(ABC + ACB)}{2}$ zur Tangente des halben Unterschiedes eben dieser Winkel tang $\frac{(ABC - ACB)}{2}$.

Es muß also gezeigt werden, daß $AC + AB : AC - AB = \text{tang}\,\frac{(ABC + ACB)}{2} : \text{tang}\,\frac{(ABC - ACB)}{2}$

Bew.

Bew. Man verlängere AC, und mache DA der kleinern Seite, wovon die Rede ist, gleich, also hier = BA, auch mache man AE = BA. Da nun DC = AC + DA, und DA = AB, so wird DC = AC + AB und EC = AC — AE; oder da AE = AB, so ist EC = AC — AB.

Man ziehe durch D und B eine unbestimmte Linie DF, ingleichen durch B und E die BE, mit BE ziehe man durch den Punkt C eine Parallele CF, welche DF schneidet. Da AD = AB = AE, so könnte man aus A einen Kreis beschreiben, der durch die Punkte D, B und E gienge. DBE würde alsdann ein Winkel an der Peripherie seyn, der auf dem Diameter DE stünde, und wäre folglich ein Rechter. Da auch FC parallel mit BE ist, so wäre DFC ebenfalls ein rechter Winkel. Daher ist bey den rechtwinkelichten Dreyecken DFC und DBE die Proportion DC : DF = EC : EF; oder DC : EC = DF : EF. oder wie aus der Construction klar ist, AC + AB : AC — AB = DF : EF.

Es ist aber ferner (wenn man FC für den Halbmesser annimmt, und aus C einen Kreis beschreibet) DF die Tangente des Winkels DCF und BF die Tangente des Winkels BCF. Also wäre jetzt AC + AB : AC — AB = tang DCF : tang BCF. Nun da DAB = ABE + AEB (der äußere den beiden innern

nern entgegen gesetzten gleich), und $AB = AE$ vermöge der Construction; so ist auch $ABE = AEB$, und $DAB = 2\,AEB$.

Ebenfalls ist $DAB = ABC + ACB$. Daher $2AEB = ABC + ACB$, und wenn man mit 2 beiderseits dividirt, $AEB = \frac{ABC + ACB.}{2}$ Weil aber EB parallel mit FC ist, so wird $AEB = DCF$. Also $DCF = \frac{ABC + ACB}{2}$.

Auch muß deßwegen $\text{tang } DCF = \text{tang } \frac{(ABC + ACB)}{2}$ seyn. Wenn man also in der obigen Proportion statt tang DCF, die ihr gleiche $\text{tang } \frac{(ABC + ACB)}{2}$ setzt; so verwandelt sie sich in $AC + AB : AC - AB = \text{tang } \frac{(ABC + ACB)}{2} : \text{tang } BCF$. Es ist aber schon gezeigt worden, daß $ABE = AEB$, und $AEB = \frac{ABC + ACB}{2}$ sey. Daraus folgt $ABE = \frac{ABC + ACB.}{2}$ Es ist aber auch $ABE = ABC - EBC$. Also $ABC - EBC = \frac{ABC + ACB}{2}$

Da

Da die beiden Parallelen BE, und FC von BC durchschnitten werden; so sind die Wechselwinkel gleich, das ist $EBC = BCF$. Folglich $ABC - BCF = \frac{ABC + ACB}{2}$. Man subtrahire beiderseits $\frac{ABC}{2}$, so wird $ABC - \frac{ABC}{2} - BCF = \frac{ABC + ACB}{2} - \frac{ABC}{2}$, das ist $\frac{ABC - BCF}{2}$ $\frac{ACB}{2}$. Und wenn man beiderseits BCF hinzu addirt, $\frac{ABC}{2} - BCF + BCF = \frac{ACB}{2} + BCF$, oder $\frac{ABC}{2} = \frac{ACB}{2} + BCF$, und beiderseits $\frac{ACB}{2}$ subtrahirt: $\frac{ABC}{2} - \frac{ACB}{2} = \frac{ACB}{2} - \frac{ACB}{2} + BCF$, oder $\frac{ABC - ACB}{2} = BCF$. Folglich $\tang \frac{(ABC - ACB)}{2} = \tang BCF$. Man setze statt tang BCF in der Proportion $\tang \frac{(ABC - ACB)}{2}$, so wird sie endlich $AC + AB : AC - AB = \tang \frac{(ABC + ACB)}{2} : \tang \frac{(ABC - ACB)}{2}$.

§. 40.

§. 40. Anm. Wenn AC kleiner als AB genommen würde; so fiele A.. nicht innerhalb AC, sondern außerhalb, und da würden die Tangenten eine andere Lage bekommen. Man kann Liebhabern den Satz in einer solchen Gestalt zur Uebung vorlegen. Wer den Beweis §. 39 inne hat, und deutlich einsieht, wird auch da keine Schwierigkeit finden.

§. 41. Lehrs. In der Algebra ist schon gezeigt worden, daß wenn man zu der halben Summe zwoer Größen ihre halbe Differenz addirt, die größere erhalten würde, und wenn man von der halben Summe die halbe Differenz subtrahirt, die kleinere herauskomme. Der Vollständigkeit wegen sey hier dieser Satz nochmal vorgetragen.

Bew. Wenn die größere der beiden Größen M, die kleinere m, die Summe beider S, ihre Differenz d heißt; so ist $S = M + m$; $M = m + d$, und $S = m + m + d = 2m + d$. Folglich $\frac{S}{2} = \frac{2m+d}{2}$; das ist $= m + \frac{d}{2}$. Da also $\frac{S}{2} = m + \frac{d}{2}$; so subtrahire man beiderseits $\frac{1}{2}d$, so wird $\frac{S}{2} - \frac{1}{2}d = m + \frac{d}{2} - \frac{d}{2}$; das ist $\frac{S}{2} - \frac{d}{2} = m$.

Exemp.

Exemp. Es sey die Summe zweener Winkel $a + b = 120^\circ$; ihre Differenz $a - b = 30^\circ$; so ist der größere Winkel $\frac{120 + 30}{2} = 75^\circ$. Der kleinere $\frac{120 - 30}{2} = 45^\circ$. Es ist auch wirklich $75^\circ + 45^\circ = 120^\circ$.

§. 42. Aufg. Aus zwoen gegebenen Seiten eines Dreyecks AC, AB, und dem Winkel BAC, welchen diese Seiten einschließen, alles übrige zu finden (Fig. 12.).

Aufl. und Bew. Da $ABC + ACB = 180^\circ - BAC$; so kann man nach dem vorigen Lehrsatze schließen: $AC + AB : AC - AB = \tang \frac{(ABC + ACB)}{2} : \tang \frac{(ABC - ACB)}{2}$. Man findet also aus den ersten drey Gliedern, welche bekannt sind, das vierte, welches die halbe Differenz der unbekannten Winkel ist; aus der halben Differenz und der halben Summe, die ebenfalls bekannt ist, den größern und kleinern Winkel des Dreyecks. Da alle Winkel und zwo Seiten bekannt sind; so läßt sich die dritte Seite BC nach dem vorigen finden.

Exemp. Es sey $AC = 2112$; $AB = 1738$;

der

der Winkel $BAC = 63° 36'$, so ist $AC + AB = 3853$, und $AC - AB = 377$. Da im Dreyecke $BAC + ABC + ACB = 180° = 179° 60'$, und $BAC = 63° 36'$; so ist $ABC + ACB = 116° 24'$; und $\frac{ABC + ACB}{2} = 58° 12'$. Also ist $3853 : 377$

$$= \text{tang } 58° 12' : \text{tang } \frac{(ABC - ACB)}{2}.$$

Logarithmisch wird das vierte Glied gefunden,

$$\log \text{tang } \frac{(ABC - ACB)}{2} = \log 377 + \log \text{tang } 58° 12' - \log 3853.$$

$$\begin{aligned} \log 377 &= 2,5763414 \\ \log \text{tang } 58° 12' &= 10,2075899 \\ \hline & 12,7839313 \\ \log 3853 &= 3,5857990 \\ \hline \log \text{tang } \frac{(ACB - ACB)}{2} &= 9,1981323 \end{aligned}$$

Diesem Logarithme kömmt in den Tafeln der log tang 8° 58' am nächsten.

Da 58° 12' die halbe Summe der beiden Winkel ist, und 8° 58' ihre Differenz; so ist $67° 10' = ABC$ dem größern, und $49° 14' = ACB$ dem kleinern.

§. 43.

§. 43. Lehrs. In einem ungleichseitigen Dreyecke ABC (Fig. 13.) beschreibe man mit der kleinsten Seite CB aus der Spitze C des Winkels ACB, welcher der größten Seite AB gegenüber stehet, einen Kreis; so verhält sich die größte Seite AB zu der Summe der beiden übrigen Seiten AC + CB, wie der Unterschied dieser beiden Seiten AC — CB, zu dem Theile der größten Seite, welcher sich außerhalb dem Cirkel befindet AE. Es muß sich demnach verhalten AB : AC + CB = AC — CB : AE.

Bew. Man verlängere AC bis an die Peripherie, so weiß man aus der Geometrie, daß AB : AD = AG : AE. Nun ist AD = AC + CD; und CD = CB. Also AD = AC + CB. Ferner ist AG = AC — GC, und GC = CB, derohalben AG = AC — CB. Es ist deßwegen AB : AC + CB = AC — CB : AE.

§. 44. Aufg. In dem Dreyecke ABC aus allen drey Seiten die Winkel zu finden (Fig. 13.).

Aufl. Man beschreibe mit der kleinsten Seite CB auf die vorhergemeldte Art (§. 43.) einen Kreis, und man kann alsdann durch die Proportion AB : AC + CB = AC — CB : AE das Stück AE finden, welches man außerhalb des Kreises findet. Nun lasse

se man das Perpendikel CF auf AB fallen, welches die Sehne EB halbiret.

Man kann FB ingleichen AF finden. Denn AB — AE = EB. Halbirt man EB, so findet sich FB. Da EF = FB, und EF + EA = AF, so giebt sich AF aus dem bekannten EF und EA.

In dem rechtwinkelichten Dreyecke CBF kann man aber aus den Seiten CB, FB den Winkel CBF finden, und im rechtwinkelichten Dreyecke FCA kann man ebenfalls aus CA und AF den Winkel CAF bestimmen (§. 24.). Daher sich der dritte ACB von selbst ergiebt.

Ex. Es sey $AB = 48'$, $AC = 34'$, $BC = 22'$, so ist $AC + CB = 34 + 22 = 56$, und $AC - CB = 34 - 22 = 12$. Also $AB : AC + CB = AC - CB : AE$, und $48 : 56 = 12 : AE$. Folglich $AE = \frac{56 \times 12}{48} = 14$.

Man hätte dieses auch durch Logarithmen berechnen können. Da wäre $\log AE = \log 56 + \log 12 - \log 48$ gewesen. Nun ist $EB = AB - AE$, oder $EB = 48 - 14 = 34$, und $\frac{1}{2} EB = FB = EF = 17'$. Es ist also in dem rechtwinkelichten Dreyecke CBF, die Hypothenuse CB, und der Kathetus FB bekannt; daher läßt sich der Winkel B nach §. 24 fin-

finden, wenn man schließt: CB : BF = sin tot : cos 13, oder 22 : 17 = sin tot : cos B.

$$
\begin{array}{rl}
\log 17 = & 1.\ 2304489 \\
\log \sin tot = & 10\ 0000000 \\
\hline
 & 11.\ 2304489 \\
\log 22 = & 1.\ 3424227 \\
\hline
\log \cos B = & 9.\ 8880262
\end{array}
$$

Dieser Logarithmus gehöret zum Sinus des Winkels 50° 36′, dessen Ergänzungswinkel 39° 24′ der Winkel B seyn muß.

Auf solche Art ergiebt sich auch die Größe des Winkels A. Denn es ist AE + EF = AF, oder 14 + 17 = 31, und nun schließt man wieder (§. 25.): AC : AF = sin tot : Cos A. Oder 34 : 31 = sin tot : Cos A.

$$
\begin{array}{rl}
\log 31 = & 1.\ 4913617 \\
\log \sin tot = & 10\ 0000000 \\
\hline
 & 11.\ 4913617 \\
\log 34 = & 1\ 5314789 \\
\hline
\log \cos A = & 9.\ 9598828
\end{array}
$$

Das ist nun der log sin 65° 45′ und die Ergänzung desselben, oder der Winkel A = 24° 15′.

Der dritte Winkel C ist nunmehr auch bekannt, man darf nur $A + B = 24° 15' + 39° 24' = 63° 39'$ von 180° oder 179° 60' abziehen. Er wird alsdann = 116° 21'.

§. 45. Zus. Wenn die Seiten eines gleichseitigen Dreyecks gegeben sind, so weiß man ohnedem, daß jeder Winkel = 60° sey; und da braucht es keiner Berechnung. In einem gleichschenkelichten Dreyecke kann man ebenfalls die Winkel auf eine leichtere Art berechnen (§. 34.).

Dieses sind die Sätze, wodurch die Dreyecke können aufgelöset werden. Heut zu Tage ist die Trigonometrie viel weiter getrieben worden, und wer sich der Mathematik einigermassen widmen will, dem sind noch viele andere Formeln zu wissen nöthig, ohne welche er nicht einmal ein ausführliches Lehrbuch z. B. von Karsten, oder Scherfer verstehen kann. Doch verstattet der Endzweck dieser Blätter nicht, daß weitere Untersuchungen über diese Lehren hier beygebracht werden, so sehr sie auch manchem Liebhaber der Wahrheit zum Vergnügen seyn würden.

Der Gebrauch der Logarithmen hat in diesen Anfangsgründen ganz ausführlich nicht erkläret werden können. Da es sich aber oft zuträgt, daß man einen

einen Logarithmen von einer größern Zahl, als man in den Tafeln findet, verlangt; auch im Gegentheil manchmal Logarithmen vorkommen, die zu größern Zahlen, als in den Tabellen enthalten sind, gehören; so soll noch kurz erkläret werden, wie man das Verlangte finden könne. Es seyen derohalben folgende Aufgaben und praktische Anwendungen.

§. 46. Aufg. Den Logarithmen einer Zahl zu finden, welche Zahl in den gewöhnlichen Tafeln, die nur bis 10000 gehen, nicht enthalten ist.

Aufl. Wenn eine solche Zahl aus der Multiplication zwoer, oder mehrerer anderer Zahlen entstanden ist, die man in den Tabellen antrifft; so dürfte man nur die Logarithmen der Factoren aufsuchen, und selbige zusammenaddiren, alsdann wäre ihre Summe der Logarithmus des Produkts der Zahlen.

Wenn man aber diese Methode nicht anwenden könnte, oder nicht wollte; so wäre, ohne daß man einen wirklichen Fehler begienge, so zu verfahren. Gesetzt man hätte den Logarithmen von 86759 nöthig; so setzt man bey diesen Berechnungen voraus, daß sich die Unterschiede der Logarithmen, wie die Unterschiede der Zahlen, zu denen sie gehören, verhalten. Bey kleinern Zahlen ist dieser Satz ziemlich

unrichtig, bey größern aber, die über 8000 gehen, ist der Fehler so geringe, daß man ihn kaum entdeken kann.

Z. E. log 669 = 2. 8254261
log 668 = 2. 8247765

Untersch. der Zahlen 1. Un. der L. 6496

log 669 = 2. 8254261
log 665 = 2. 8228216

Untersch. der Zahlen 4. U. der L. 26045

Nun müßte nach dem Satze seyn: 1 : 4 = 6496 : 26045. In dem ersten Verhältniße ist aber der Exponent 4, in dem andern $4\frac{61}{6496}$, folglich um den Bruch größer, als das erste; und die Proportion ist nicht die richtigste.

Um es auch bey großen Zahlen zu versuchen, sey

log 8236 = 3. 9157163
log 8235 = 3 9156636

Untersch. der Zahlen 1. Untersch. der Log. 527

log

$$\log 8236 = 3.9157163$$
$$\log 8234 = 3.9156109$$

Untersch. der Zahlen 2 Untersch. der Log. 1054

Hier ist in der That 1 : 2 = 527 : 1054, denn in beiden Verhätnißen ist der Exponent 2.

Wenn also angenommen wird, daß sich die Unterschiede der Zahlen, wie die Unterschiede der ihnen zugehörigen Logarithmen verhalten, so würde von 86759 der Logarithme gefunden werden, wenn man eine Zifer rechter Hand wegläßt, damit man eine Zahl erhält, von welcher man den Logarithme noch in den Tabellen antrifft. Bestünde also die gegebene Zahl aus 6 Zifern; so müßte man zwo davon rechter Hand wegnehmen; und bestünde sie aus 7 Zifern, so müßte man 3, u. s. w. weglassen. Von dieser abgekürzten Zahl 8675 und auch der nächst größern 8676 suche man die Logarithmen in den Tafeln.

Es ist $\log 8675 = 3.9382695$
$\log 8676 = 3.9383195$

Hieraus mache man die Logarithmen der Zahlen 86750 und 86760, welches dadurch geschieht, wenn man die Charasteristik der Log um 1 vermehrt.

Es wird log 86750 = 4. 9382695

log 86760 = 4. 9383195

Zwischen die beiden Zahlen 86750 und 86760 fällt die Zahl 86759, und folglich auch zwischen beide Logarithmen der Logarithme der gegebenen Zahl. Man subtrahire daher die kleinere Zahl und ihre Logarithme von der größern und dessen Logarithme; so bekömmt man den Unterschied der Zahlen = 10, den Unterschied der Logarithmen = 500. Jetzt mache man die Regel Detri: der Unterschied der Zahlen 10 giebt einen Unterschied der Logarithmen 500, was giebt 9. Das vierte Glied wird = 450. Diese 450 müssen noch zu dem Log von 86750 hinzugesetzt werden, damit der Logarithme von 86759 herauskomme.

log 86750	=	4. 9382695
		450
log 86759	=	4. 9383145

§. 47. Aufg. Zu einem Logarithme, der größer ist, als die Logarithmen der gewöhnlichen Tafeln, die dazu gehörige Zahl zu finden.

Aufl. Wenn die Zahlen, welche auf die Charasteristik des gegebenen Logarithmen folgen, voll-

ständig in den Tafeln angetroffen würden; so wäre nicht die geringste Schwierigkeit. Man dürfte nur immer die Zahl 10mal größer machen, so oft man die Charasteristik um 1 vermehret, damit die Charasteristik des gegebenen Logarithmen herauskäme. Z. E. Es wäre der Log 5. 9196533 gegeben; so findet man ihn in den Tabellen vollständig, er gehöret zu der Zahl 8311, die Charakteristik ist aber 3. Macht man nun die Charakteristik 4; so wird die Zahl 83110, macht man sie = 5, so wird die Zahl 831100, wie dieses schon aus der Algebra bekannt ist.

Wäre aber ein Logarithme gegeben, welcher, nachdem man ihn unter einer kleinern Kennzifer aufgesucht hat, nicht anzutreffen wäre; so nehme man sowohl den nächstkleineren, als nächstgrößern, und mache die Charakteristik eines jeden so groß, als die Charakteristik des gegebenen Logarithmen ist, zu den Zahlen aber setze man so viele Nullen rechter Hand, als Einheiten zu der Charakteristik des Logarithmen gesetzt wurden.

Es sey der Logarithme 4. 9383145, wenn man ihn unter der Charakteristik 3 in den Tabellen aufsucht; so findet man den nächst größern

3.9383195 = log 8676

den nächst kleinern

3.9382695 = log 8675

 Wenn

Wenn man die Charakteristik eines jeden um 1 vermehrt, damit die Charakteristik des gegeben Log. herauskomme; so wird

$$4.9383195 = \log 86760$$
$$4.9382695 = \log 86750$$

Man subtrahire die beiden Logarithmen und ihre Zahlen von einander; so wird der Unterschied der ersten 500, der andern 10. Man subtrahire auch vom gegebenen Logarithme den nächst kleinern

$$\begin{array}{r} 4.9383145 \\ 4.9382695 \\ \hline 450 \end{array}$$

Man mache die Regel Detri: der Unterschied der Logarithmen 500 giebt 10, was giebt der Unterschied 450; nämlich 9. Da nun 9 der Unterschied zwischen der bekannten kleinern Zahl 86750 und der unbekannten Größern ist; so muß die unbekannte herauskommen, wenn man den Unterschied 9 zu der kleinern addirt. Es wird also 86759 aus 86750 + 9.

IV. Abschnitt.

Einige Anwendungen der Trigonometrie.

Es ist nicht wohl möglich, daß man hier die Anwendung der Trigonometrie auf die verschiedenen Gegenstände zeige. Doch nur einiges, und das wenigste zu berühren, so seyen folgende Aufgaben.

§. 48. Aufg. Zu finden, wie viel der Winkel ACB, der auf dem Papier gezeichnet ist, in Graden hält (fig. 8.)

Aufl. Man nehme auf einem Schenkel des Winkels von einem Maaßstabe, der in 1000 gleiche Theile getheilet ist, CA = 1000, und lasse auf den andern Schenkel des Perpendikels AB herab. Man messe dieses Perpendikel auf eben dem Maaßstabe, und suche in den Tabellen einen Sinus auf, dessen erste drey Zifern, wenn man die vier letzten ausläßt, die gefundene Größe dieses Perpendikels anzeigen; so wird dieses Sinus sein Winkel = ACB seyn. Man findet zwar solchergestalt den Winkel nicht genau in einzelnen Minuten, aber doch auf 4 bis 5 Minuten genau, und also viel schärfer, als mit dem Transporteur.

Wenn

Wenn ein Winkel in Graden gegeben ist; so läßt sich selbiger an einen Punkt C einer Linie BC so setzen: Man sucht des Winkels Sinus und Cosinus in den Tabelleu auf, und läßt von beiden die letztern 4 Zifern weg. Von dem Maaßstabe, der in 1000 Theile getheilt ist, nehme mau die 3 Zifern des Cosinus, und trage sie von C aus in B. Aus B errichte man ein Perpendikel, und mache AB = den 3 Zifern, welche den Sinus ausdrücken. Man verfertiget Arten von Maaßstäben, auf welchen die Sehnen der Winkel nach einem kleinern Halbmesser als in den Tafeln aufgetragen sind, und welche dazu dienen, Winkel zu messen, und zu zeichnen, die man geradelinichte Transporteurs nennet. Man sehe Kästners Trig. S. 365; Wolf Trig. §. 65; Ebert. Trig. §. 46. und andere.

§. 49. Aufg. Einige Aufgaben der Feldmeßkunst trigonometrisch aufzulösen.

Aufl. Die Entfernung zweyer Oerter, zu denen beiden man kommen kann, läßt sich aus den gemessenen dreyen Stücken nach §. 42 finden.

Die Entfernung zweyer Oerter (fig. 14.) zu denen beiden man kommen kann, läßt sich aus den bekannten Stücken nach §. 38. bestimmen.

Die

Die Entfernung zweyer Oerter, zu deren keinem man kommen kann, wird so gefunden. Es wird nämlich, wie in der Geometrie gezeigt worden, CD, und die Winkel o, x, m, n gemessen. Da nun m + n = CDB und o + x = ACD; so kann man erstlich aus den bekannten Winkeln x und CDB, den dritten B im Dreyecke CDB finden; und eben so aus ACD und m den dritten A im Dreyecke ACD; und dann kann man schließen: sin B : CD = sin CDB : CB und sin A : CD = sin CDA : AC. Aus den beiden bekanuten Seiten AC und CB und dem eingeschlossenen Winkel o läßt sich nun nach §. 42 der Winkel CAB und CBA berechnen. Wenn man nur einen weiß, so läßt sich AB endlich nach der Proportion sin CAB : CB = sin o : AB finden; oder wenn man den andern Winkel gebraucht; so ist sin ABC : AC = sin o : AB.

Eine Höhe, mit welcher man sich in einerley Ebene befindet, zu deren unterstem Endpunkte man kommen kann, wird aus den bekannten Stücken nach §. 29. gefunden.

Eine Höhe, zu deren unterstem Endpunkte man nicht kommen kann (fig. 15) läßt sich folgendergestalt durch trigonometrische Rechnung ausfindig machen. Wie man aus der Geomrtrie weis, so sind hier AB, und die Winkel o, x, y, bekannt. Aus

x und y weiß man im Dreyecke ABD auch den Winkel ADB. Es ist daher sin ADB : AB = sin y : AD. Weil bey C ein rechter Winkel ist; so ist ADC ein rechtwinkelichtes Dreyeck; man sagt also weiter: sin tot : sin o = AD : DC.

Wenn man der Flächen ihren Umfang trigonometrisch berechnen wollte; so müßte man aus den gegebenen Stücken nach und nach alle die Dreyecke auflösen, in welche man die Fläche getheilt hat. Wer die vorhergehenden Lehren verstanden hat, der hat keine weitere Anweisung dazu nöthig. Er sieht es von selbst ein. Die practische Ausübung betreffend, so erinnere man sich, was in der Geometrie gesagt worden ist.

Wenn man die drey Seiten eines Dreyecks weiß; so kann man desselben Innhalt trigonometrisch berechnen. Aber sowohl dieß, als die Anwendung der trigonometrischen Lehrsätze auf die Polygone hat hier wegbleiben müssen.

An-

Anhang

Kurzgefaßte Geschichte der Trigonometrie.

Die Trigonometrie wird zwar mit größerm Nutzen in verschiedenen Wissenschaften auf verschiedene Gegenstände angewandt (§.3.). Besonders aber ist diese Wissenschaft ganz unentbehrlich, wenn man die Astronomie und die damit verwandten Wissenschaften treiben will. Die Alten mußten daher auf die Trigonometrie denken, da sie sich mit der Astronomie beschäftigten, und daraus ist abzunehmen, das letztgenannte Wissenschaft zur Erfindung der erstern Anlaß gegeben hat. Wie man aus Ptolomeei Almagesto sehen kann, so wurde vormals die Trigonometrie als ein Theil der Astronomie angesehen. Auch jetzt noch pflegen die meisten Schriftsteller die sphärische Trigonometrie wenigstens ihren astronomischen Werken vorzusetzen.

So viel man weiß, war Hypparchus der erste, welcher von der Trigonometrie etwas geschrieben hat. Er verfertigte 12 Bücher de Triangulis, die aber ver-

verloren gegangen sind. Claudius Ptolomaeus, der einige hundert Jahre später lebte, verfertigte im zweyten Jahrhunderte nach Chr. Geb. aus Hipparchus Werke einen Auszug, den man jetzt noch im ersten Buche seines Almagesti findet. Wie es aber mit allen Wissenschaften gehet; so war auch die Trigonometrie anfangs von ihrer Vollkommenheit ziemlich weit entfernt. Man hatte den Sinus totus in 60 Theile, und jeden davon wieder in 60 Minuten, und jede Minute in 60 Secunden getheilet. Weil man nun mit 60 theilichten Brüchen rechnen mußte, so wurden die Rechnungen sehr verdrießlich. Doch war man lange Zeit damit zufrieden, Griechen und Araber bedienten sich dieser Rechnungsart, bis ungefähr erst vor 300 Jahren Joh. Regiomontanus die Trigonometrie durch Einführung der zehntheilichten Brüche bequemmer und gemeinnütziger machte. Dieser Joh. Regiomontanus, oder eigentlich Joh. Müller von Königshofen in Franken gebürtig, nachmaliger Astronom zu Nürnberg hat die Tafeln der Sinus, wie wir sie jetzt noch haben, berechnet. Anfänglich theilte er den Halbmesser oder Sinus totus in 60 tausend Theile; nachher theilte er ihn aber in 10 Millionen Theile, welche letztere Eintheilung so viele Bequemlichkeit verschaft. "Regiomontanus hat dadurch, daß er die zehntheilichte Brüche in der Trigonometrie eingeführt hat, ein großes zu dieser Wissenschaft beygetragen, wie Hr. von Wolf

schreibt.

schreibt. Gregorius Ioachimus Rheticus rechnete darauf mit großer Mühe die Sinus von 10 zu 10 Secunden in solchen Theilen, von welchen der Radius oder Sinus totus 1000 Billionen hat. Nach seinem Tode sind diese Tafeln von Bartholomaeus Pitiscus mit Zusätzen zu Frankfurth 1613 in fol. herausgegeben worden. Dieses Werk dienet sonderlich dazu, daß man die gemeinen Tafeln daraus corrigiren kann, damit nicht durch die zum öftern wiederholten Aufllagen Fehler einschleichen. Rheticus, welcher Prof. der Mathematik zu Wittenberg war, und nachher bey Copernico lebte, hat viele Mühe angewandt, die Trigonometrie vollkommener zu machen. Man sieht dieses aus dem opere Palatino de Triangulis, welches er angefangen, **Valentinus Otto** aber, der Mathematikus des Churfürsten Friederich IV. von der Pfalz zu Ende gebracht hat.

Bey allem diesen blieb noch das Rechnen mit den Sinussen sehr beschwerlich. Man mußte große Zahlen mit einander multipliciren und dividiren. Diese Beschwerlichkeit wurde aber gehoben, als der Schottländer, **Johann Neper, Baron von Marchiston** auf die wichtige Erfindung der Logarithmen gerieth. Er machte sie in seinem Canone mirifico Logarithmorum Edinburg 1614 zuerst öffentlich bekannt. Einige geben nun den **Jost Pyrgedes** Landgrafen von Hessenkassel, Mathematikus für den

ersten Erfinder der Logarithmen aus, wie dieses schon an einem andern Orte (Algeb. §. 79.) bemerkt worden ist. Neper nun, der die Logarithmen auf die Sinus und Tangenten anwandte, nahm an, daß der Sinus totus = 0. Dieß war aber nicht bequem, denn, indem die Sinus zunahmen, nahmen die Logarithmeu ab, und wurden negativ. Heinrich Brigg, Professor Geometr. zu Oxfurt hob auch diese Beschwerlichkeit. Er rechnete mit Gutbefinden Nepers die Logarithmen auf die Art, wie wir sie jetzt noch haben. Es ließ von 1 den Logarithmus 0 seyn, und rechnete aus diesem Fundamente die Logarithmen der gemeinen Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 101000. Sieh Briggii Arithmetica logarithmica 1624. in Fol. Eben auch Brigg war gesinnet, neue Tafeln der Sinus und Tangenten sammt ihren Logaritmen herauszugeben, und zwar für Hunderttheile der Grade. Er starb aber vor Endigung des Werks. Doch ersetzte Heinrich Gellibrand das noch fehlende; und aus beider Arbeit ist die Trigonometria britanica entstanden. Benjamin Ursinus ist unter den ersten gewesen, der die Logarithmen den Deutschen bekannt gemacht hat. Neper hatte die Logarithmen bloß auf jede Minute berechnet; Ursin aber in seiner Trigonometrie, oder vielmehr angehängten Canone logarithmorum, hat sie von 10 zu 10 Secunden berechnet. Endlich hat Adrian Vlacq zu Briggs Logarithmen

rithmen die fehlende von 20000 bis 90000 hinzugethan; und die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden beygefügt. Neper, Brigg, Vlacq haben beschwerliche und mühsame Rechnungen anstellen müssen. In unsern Zeiten, da die Analysis so sehr erweitert worden, hat man auch besondere Methoden und Kunstgriffe erfunden, wodurch diese Arbeiten auf eine ungleich leichtere Art hätten unternommen werden können.

Was man bis zu Anfange des jetzigen Jahrhunderts in der Trigonometrie wußte, findet man unter andern in des *Baron Wolfes mathemat. Schriften.* Hierbey macht nun Hr. Dr. Clemm die Anmerkung: „Darinn aber schien *Wolf* was eigenes zu haben, das eben nicht so gar löblich ist, daß er von allen neuen Entdeckungen, die seit dieser Zeit gemacht wurden, bey den neuesten Auflagen seiner Schriften das mindeste nicht eingeschaltet, und daher nach dem Zeugnisse aller Kenner, die Trigonometrie, deren wichtigen Einfluß in andern Wissenschaften er doch überall rühmet, nichts destoweniger so unvollständig und abgekürzt vorgetragen habe, daß man — — &c.„ Mit einem Worte, in diesen Schriften, so gar in seinem größern lateinischen Werke fehlet die Anwendung der Buchstabenrechnung und der Analysis auf die Trigonometrie, und nur durch die erstern kann man sich in Stand setzen,

die Erfindungen der letztern recht gebrauchen, auch selbst erfinden zu lernen. Wie die Analysis sowohl des Endlichen als des Unendlichen nach und nach durch große Mathematiker ist erweitert worden; so hat auch die Trigonometrie sich immer mehr der Vollkommenheit genähert. Dieß beweisen die Werke des **Newtons**, der **Bernoullis**, hauptsächlich die Werke des erhabenen und großen Analysten, Hr. **Eulers**; ingleichen der HH. **Hausen**, **Kästner**, **Segner**, **Lambert**, **Karsten**, und anderer vortreflicher Männer mehr, deren Verdienste um die Mathematik überhaupt, so wie um die Trigonometrie besonders, fast jedem bekannt sind.

Innhalt
aus den Anfangsgründen der Geometrie.

Vorläufige Erklärungen und Grundsätze Seiten . . 8

I. Abschnitt. Von Linien, Winkeln, und Figuren in Ansehung ihrer Gleichheit. Seit. . : 23

II. Absch. Von dem Kreise. Seit. : 64

III. Absch, Von Ausmessung der geraden Linien und Figuren S. . 81

IV. Absch. Von der Aehnlichkeit der Figuren. S. . . 113

V. Absch. Von einigen Proportionen bey dem Kreise. S. . . 127

VI. Absch. Von der Ausübung der Geometrie auf dem Felde, oder von der praktischen Geometrie. S. . 134

VII.

VII. Absch. Von Messung und Aufnehmen einer Gegend, oder Fläche. S. . . . 149

VIII. Absch. Von Messung der Höhen. S. . . . 154

IX. Absch. Von den geometrischen Körpern, oder der Stereometrie. S. . 157

Anhang. Kurzgefaßte Geschichte der Geometrie. S. . . 193

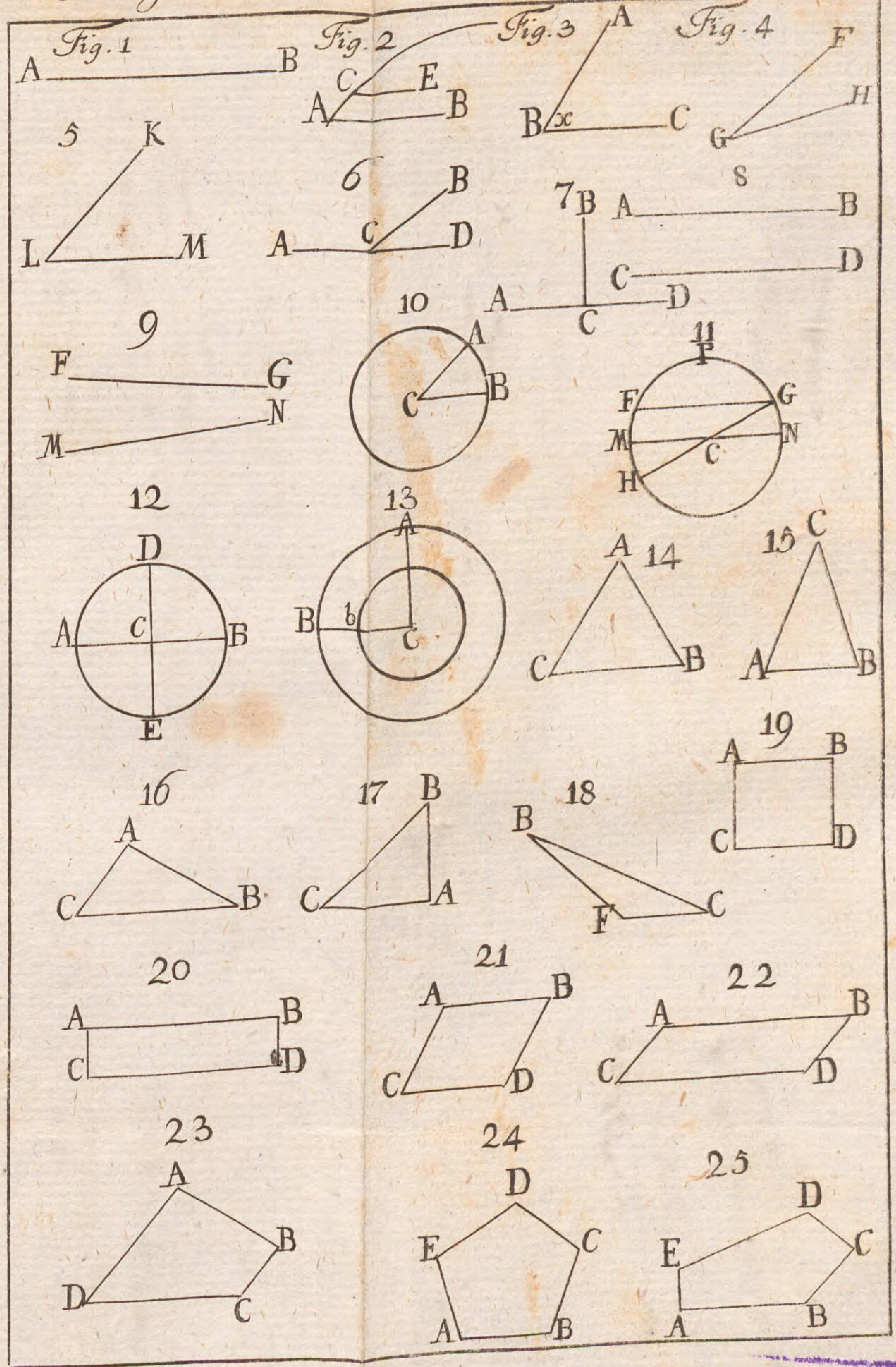
Aus den Anfangsgründen der ebenen Trigonometrie.

I. Absch. Vorläufige Kenntnisse. S. 202
II. Absch. Von den rechtwinkelichten Dreyecken, und deren Ausrechnung. 231
III. Absch. Von den gleichschenkelichten Dreyecken. S. . . 244
IV. Absch. Allgemeine Auflösung der Dreyecke. S. . . 245
V. Absch. Einige Anwendungen der Trigonometrie. S. . . 267
Anhang. Kurzgefaßte Geschichte der Trigonometrie. S. . . 271

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

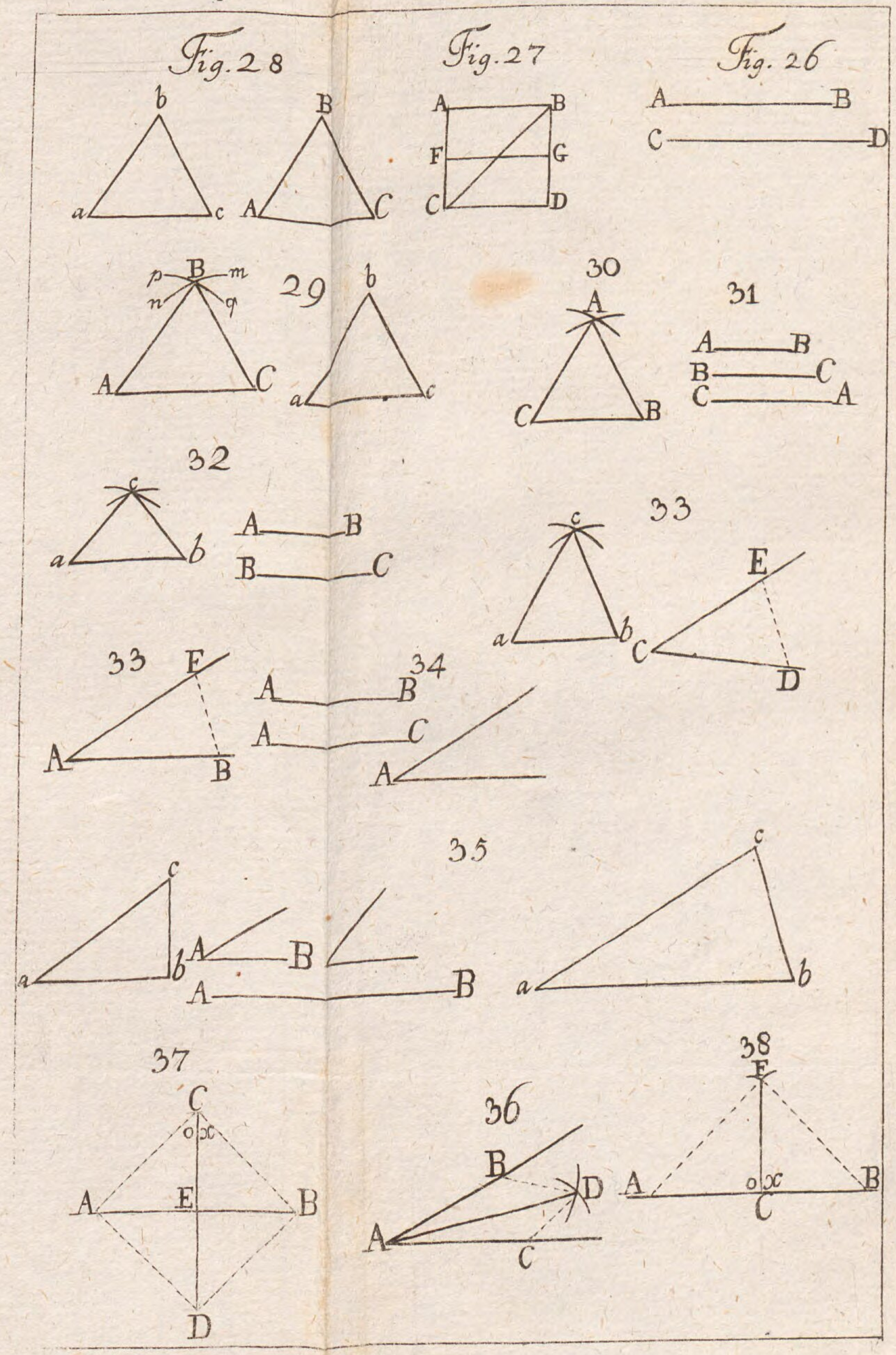
2
Fig. 3
Fig. 4
7
8
10
11
13
14
15
17
18
19
21
22
24
25

Tab. I in fine



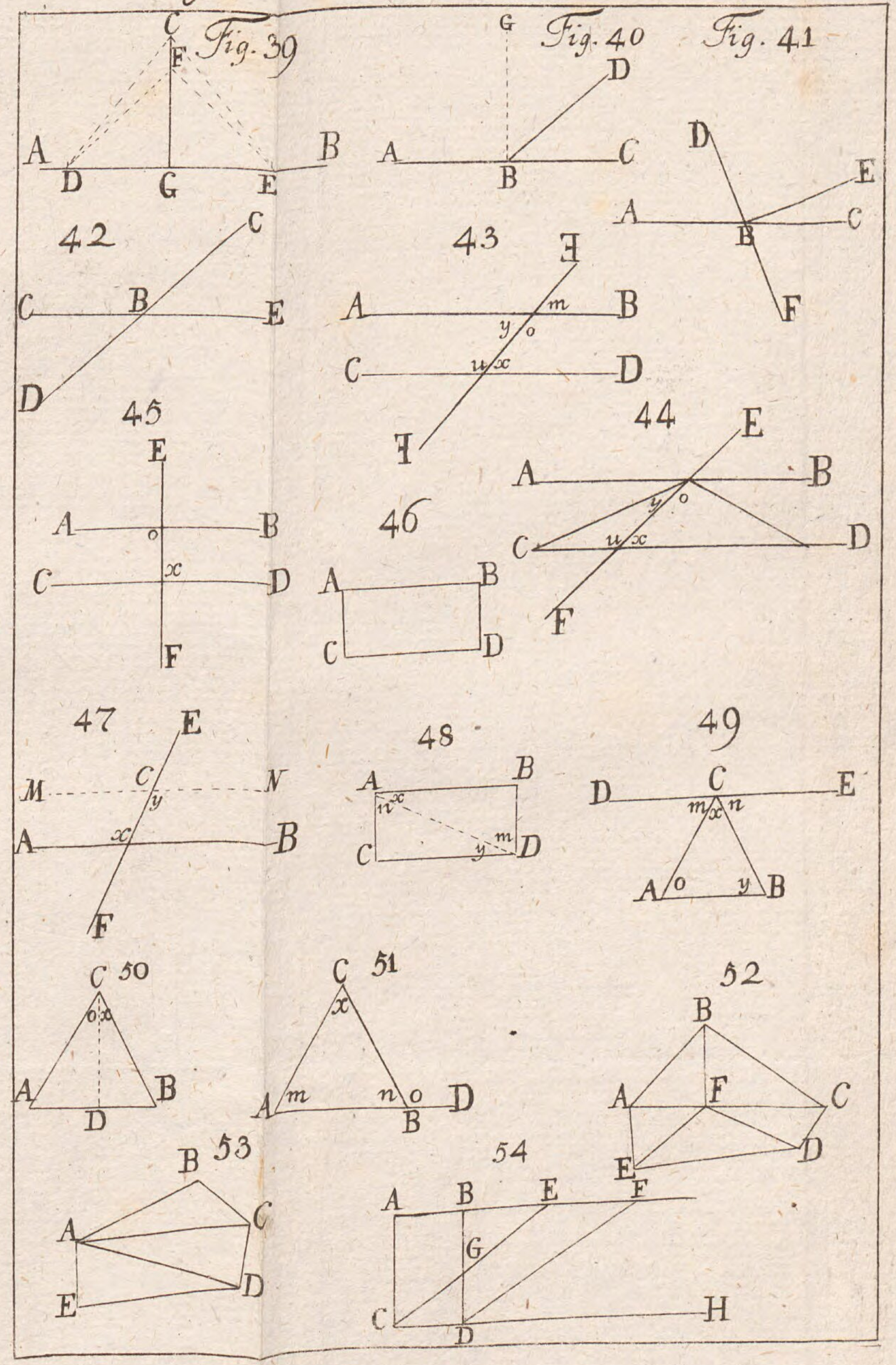
BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MÜNCHEN

Tab. II in fine



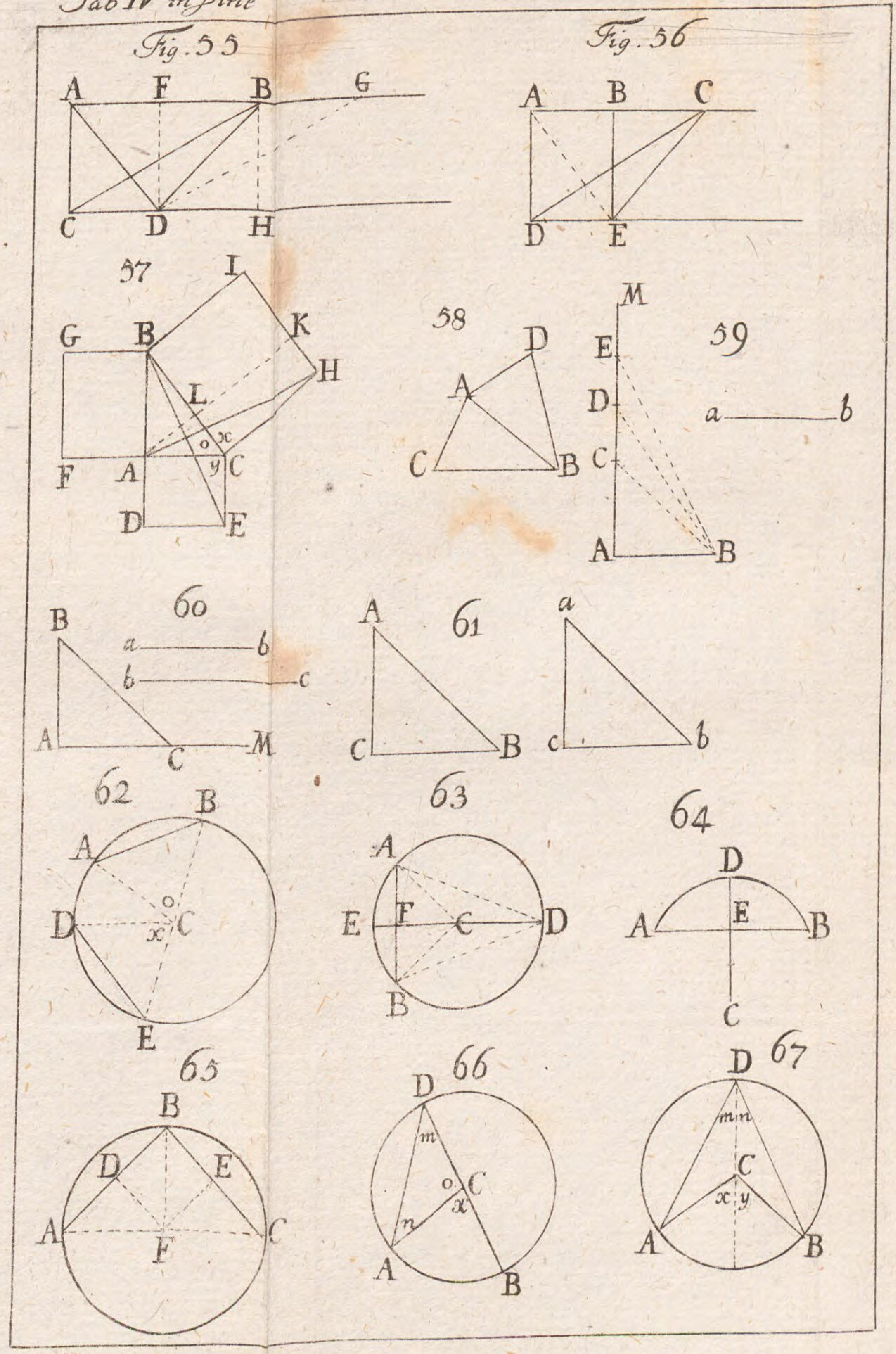
B

Tab. III in fine

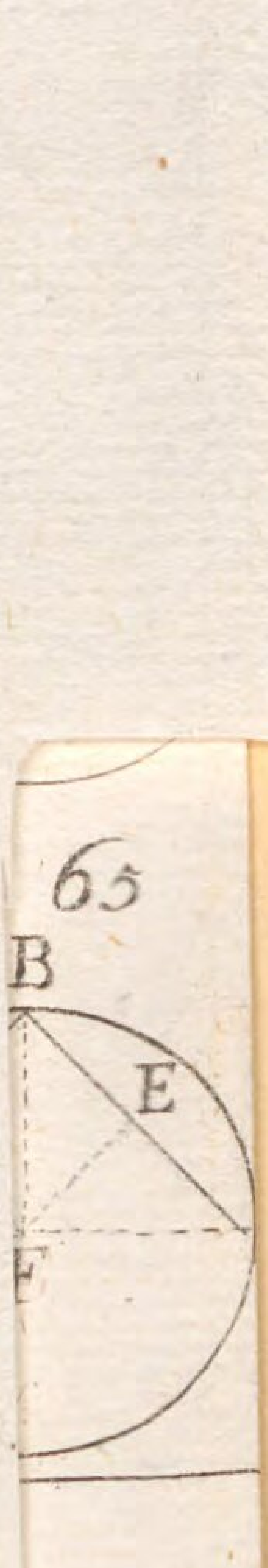


53

Tab IV in fine



65



Tab. V in fine

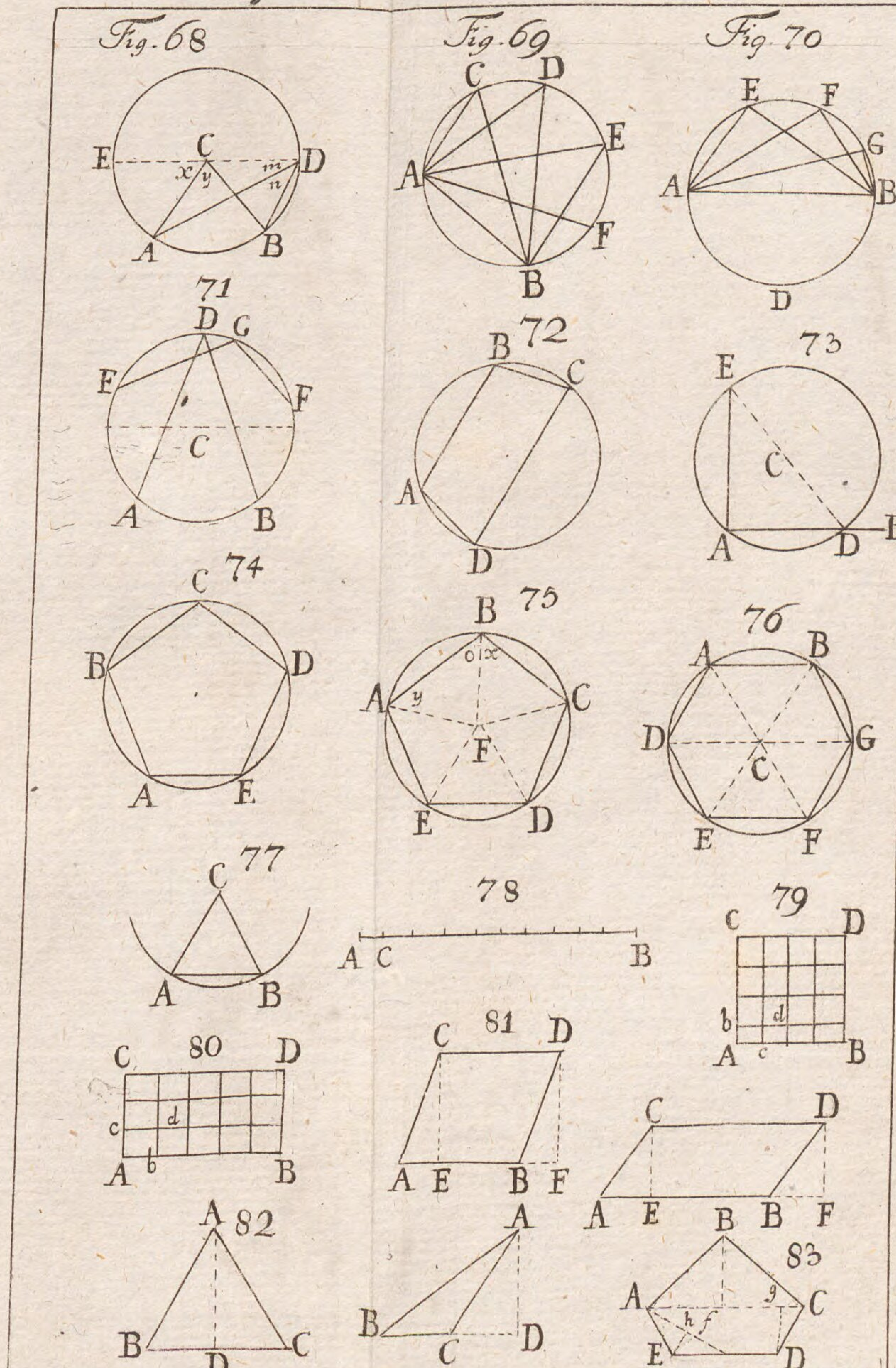
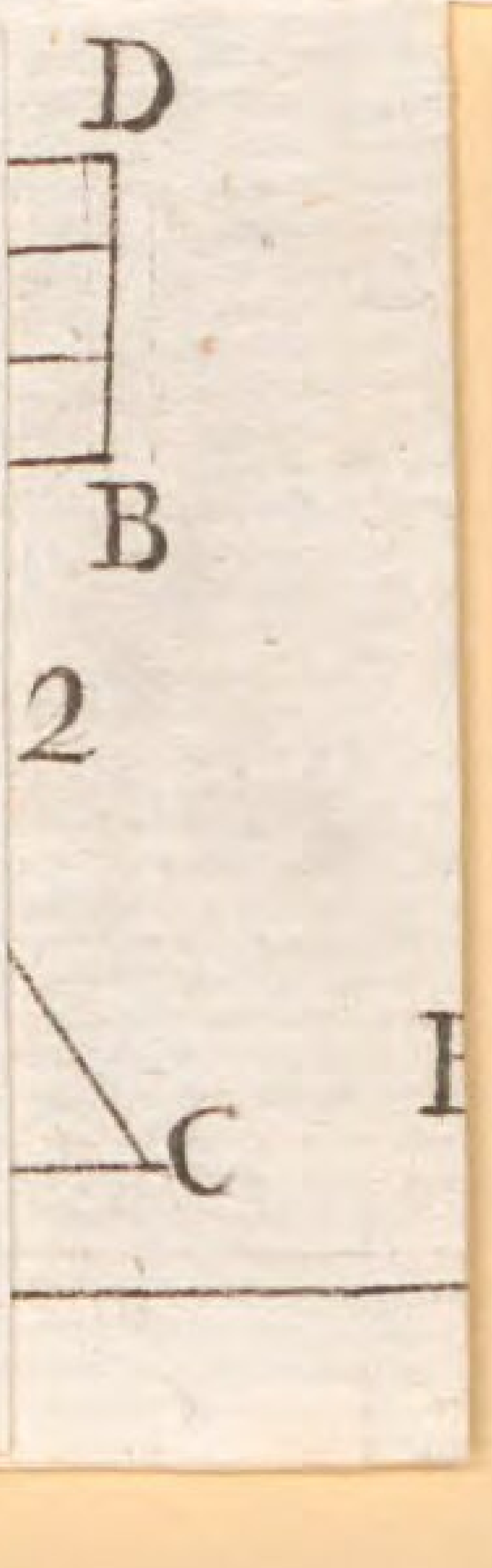
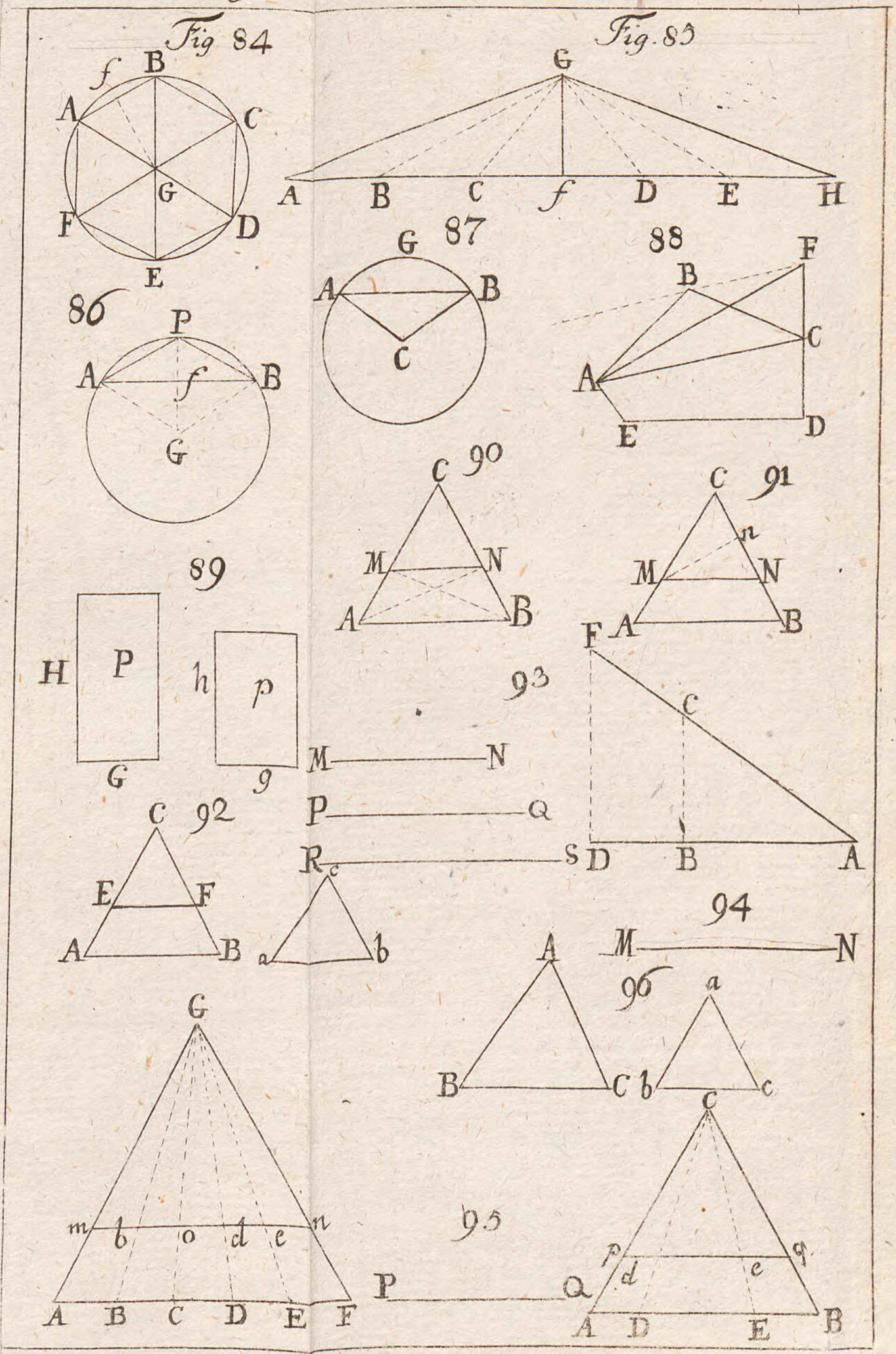


Fig. 68
E C D x y m n A B
Fig. 69
C D E A F B
Fig. 70
E F G A B D
71
D G E F C A B
72
B C A D
73
E C A D B
74
C B D A E
75
B o x A y C F E D
76
A B D G C E F
77
C A B
78
A C B
79
C D b d A c B
80
C D c d A b B
81
C D A E B F
C D A E B F
82
A B D C
A B C D
83
B A g C h f E D


D
B
2
C

Tab. VI in fine



d e
D E

Tab. VII in fine

Fig. 97

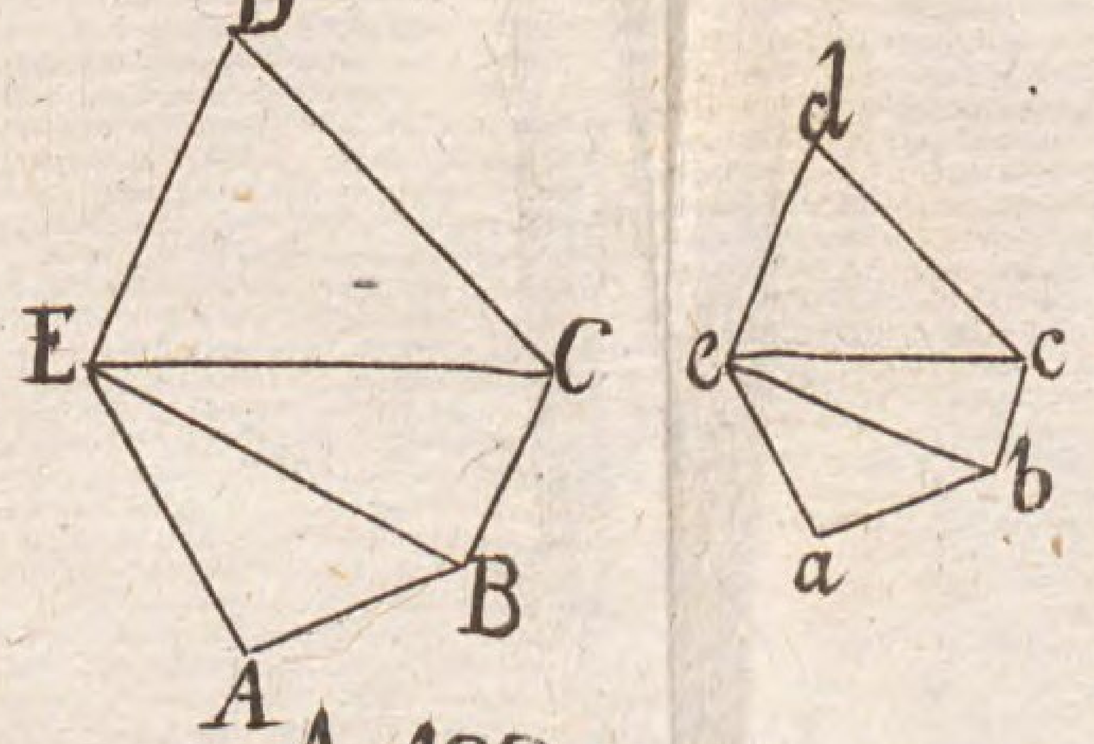


Fig. 98

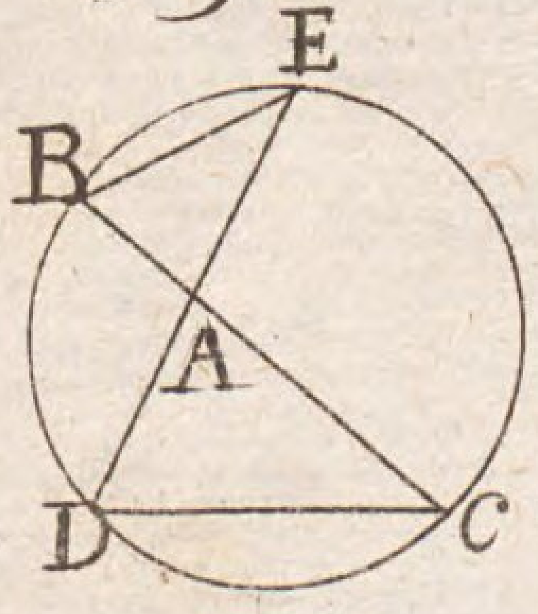
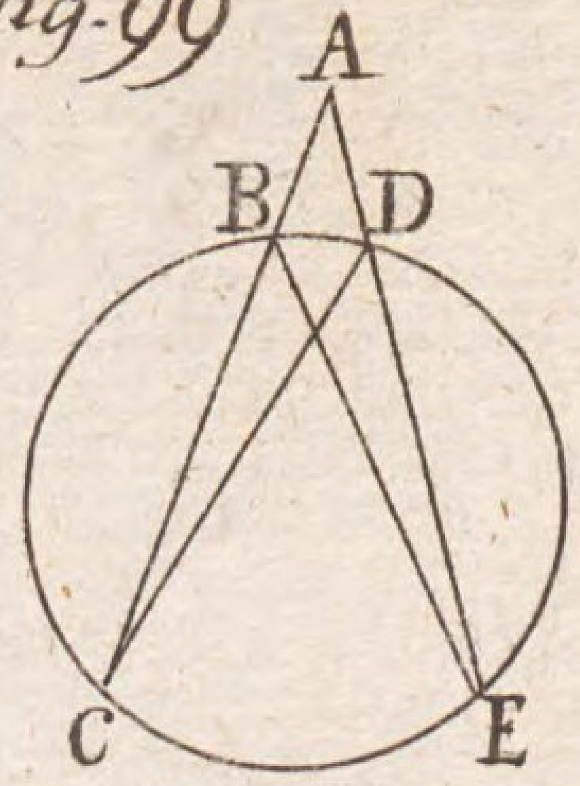
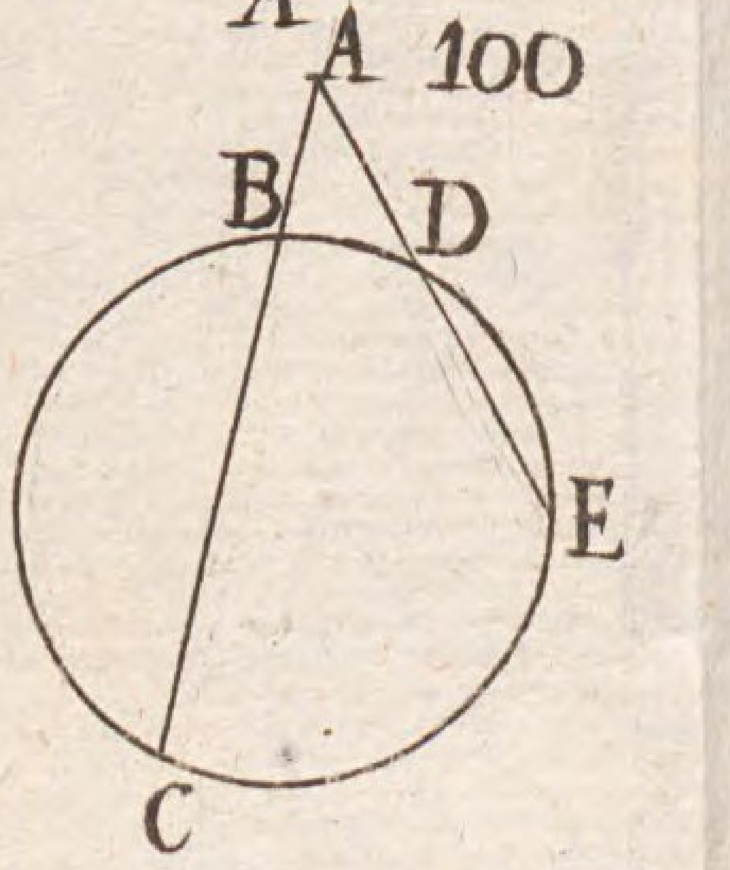


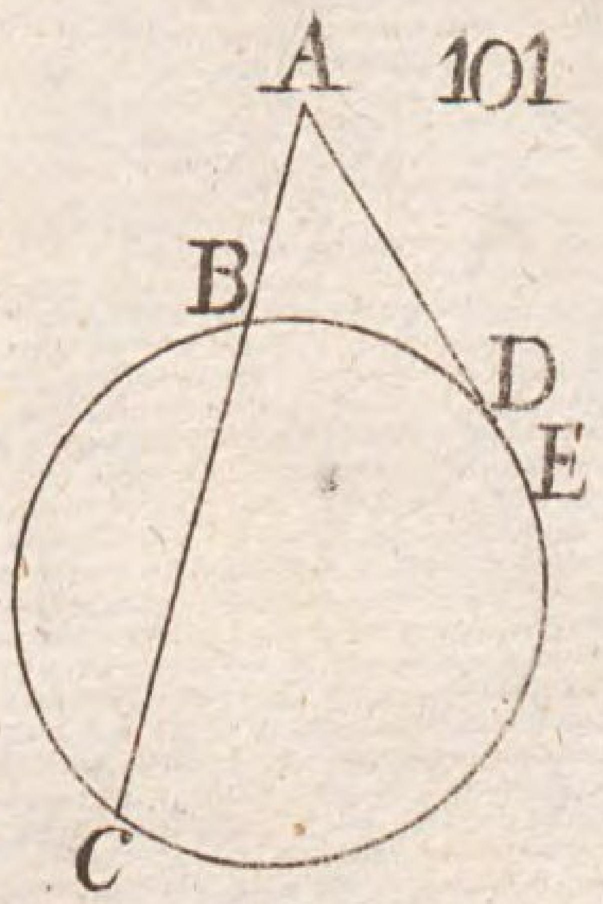
Fig. 99



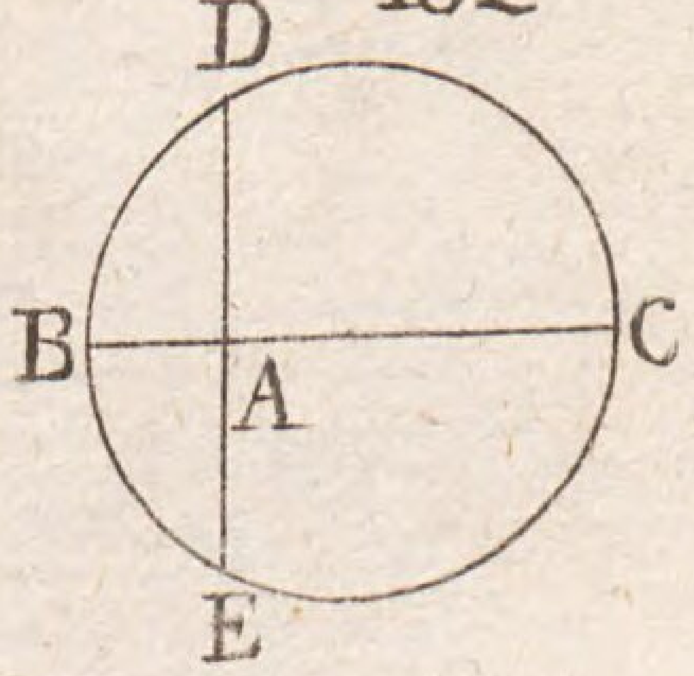
100



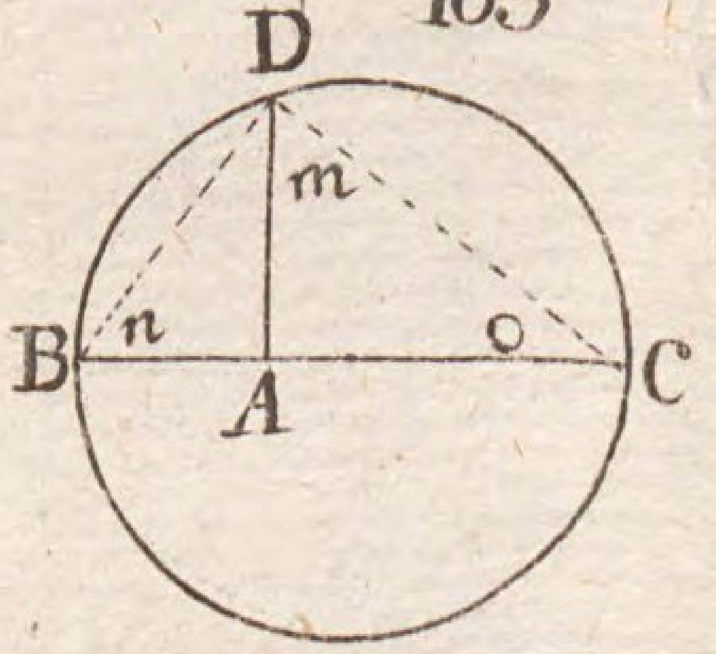
101



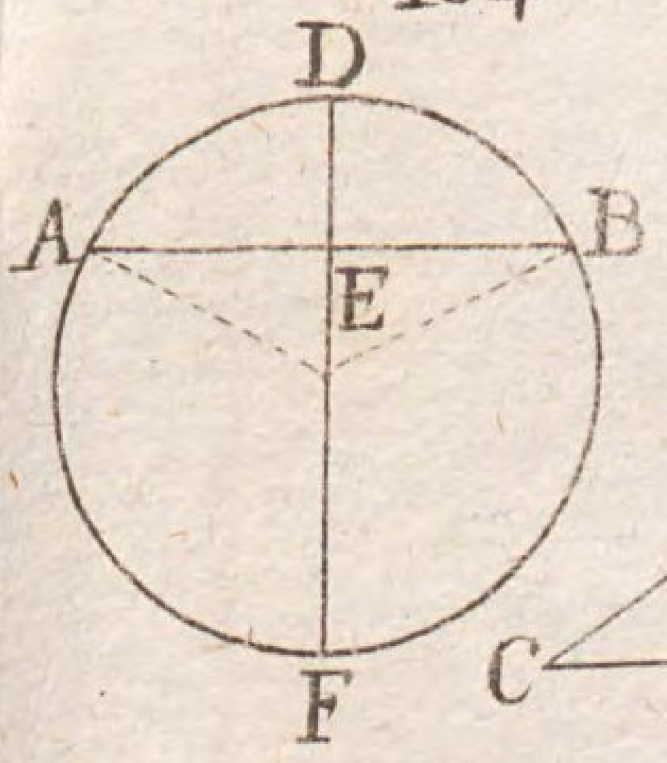
102



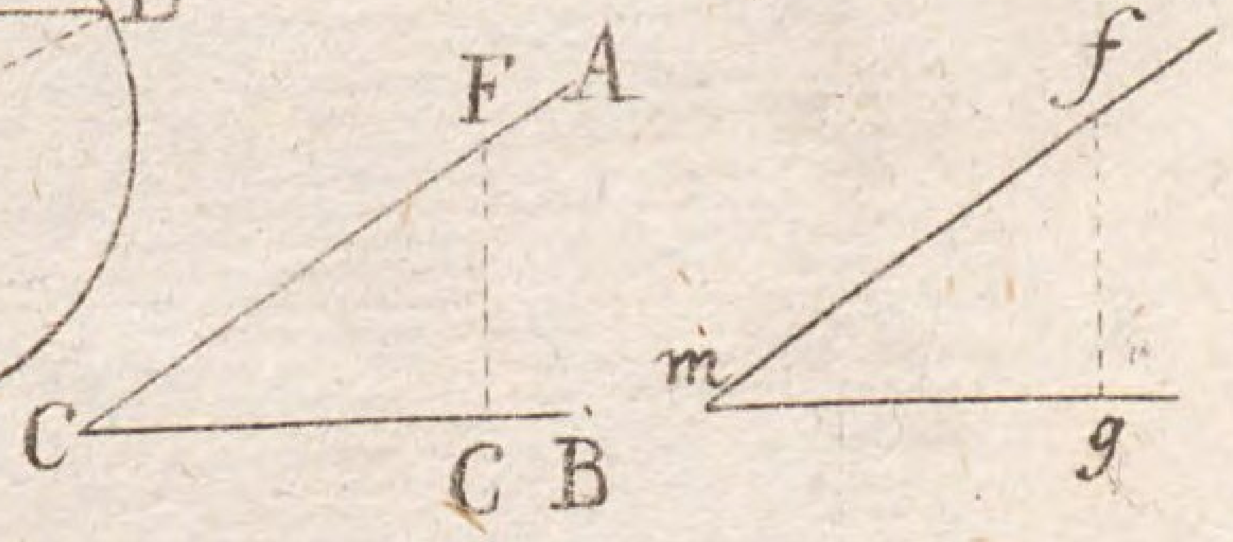
103



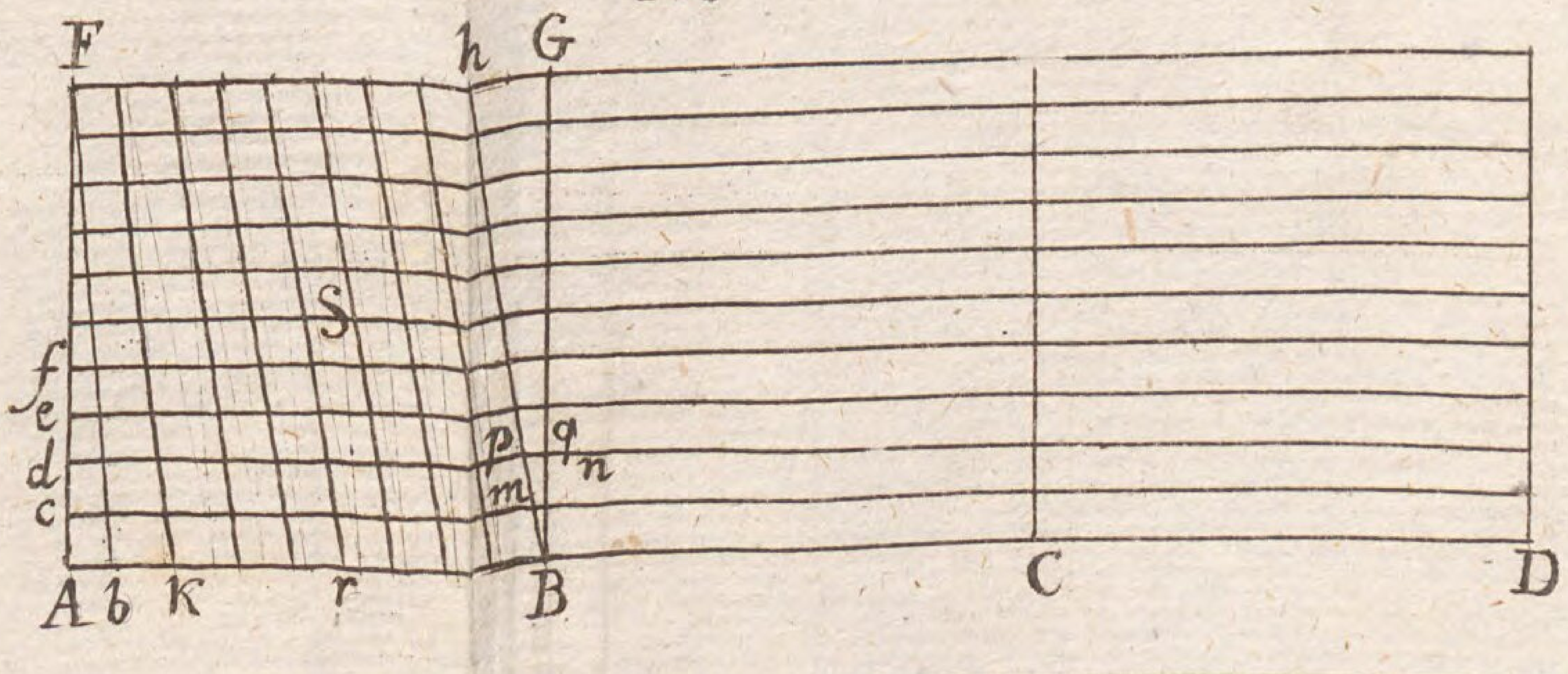
104

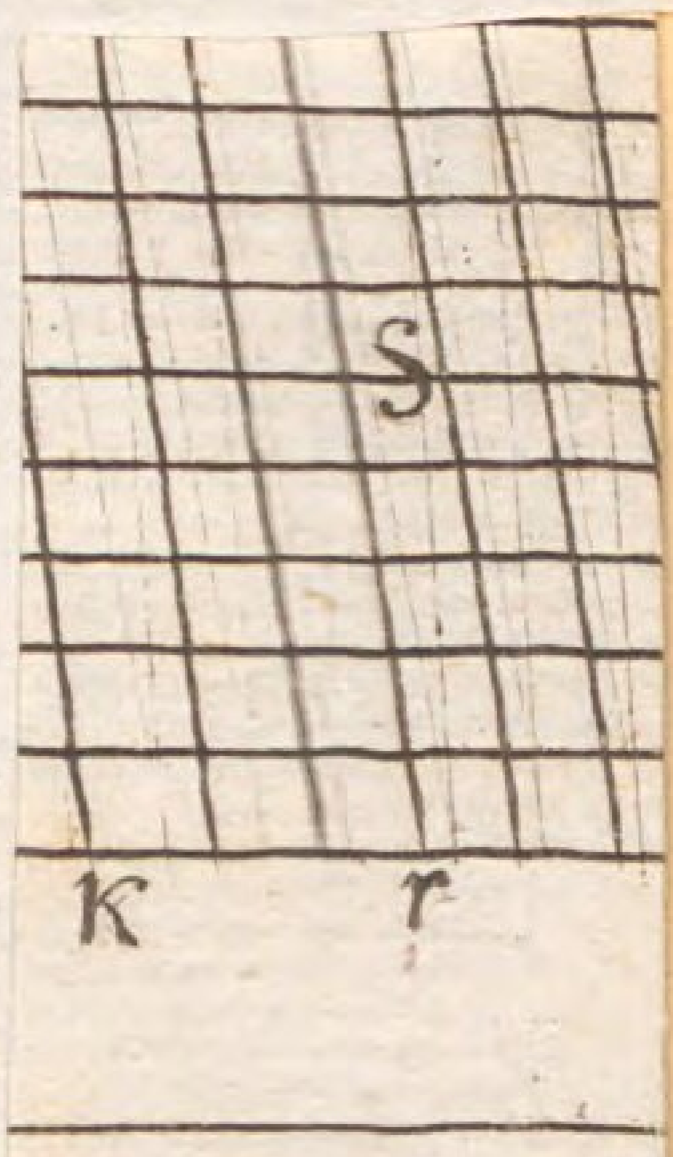


105

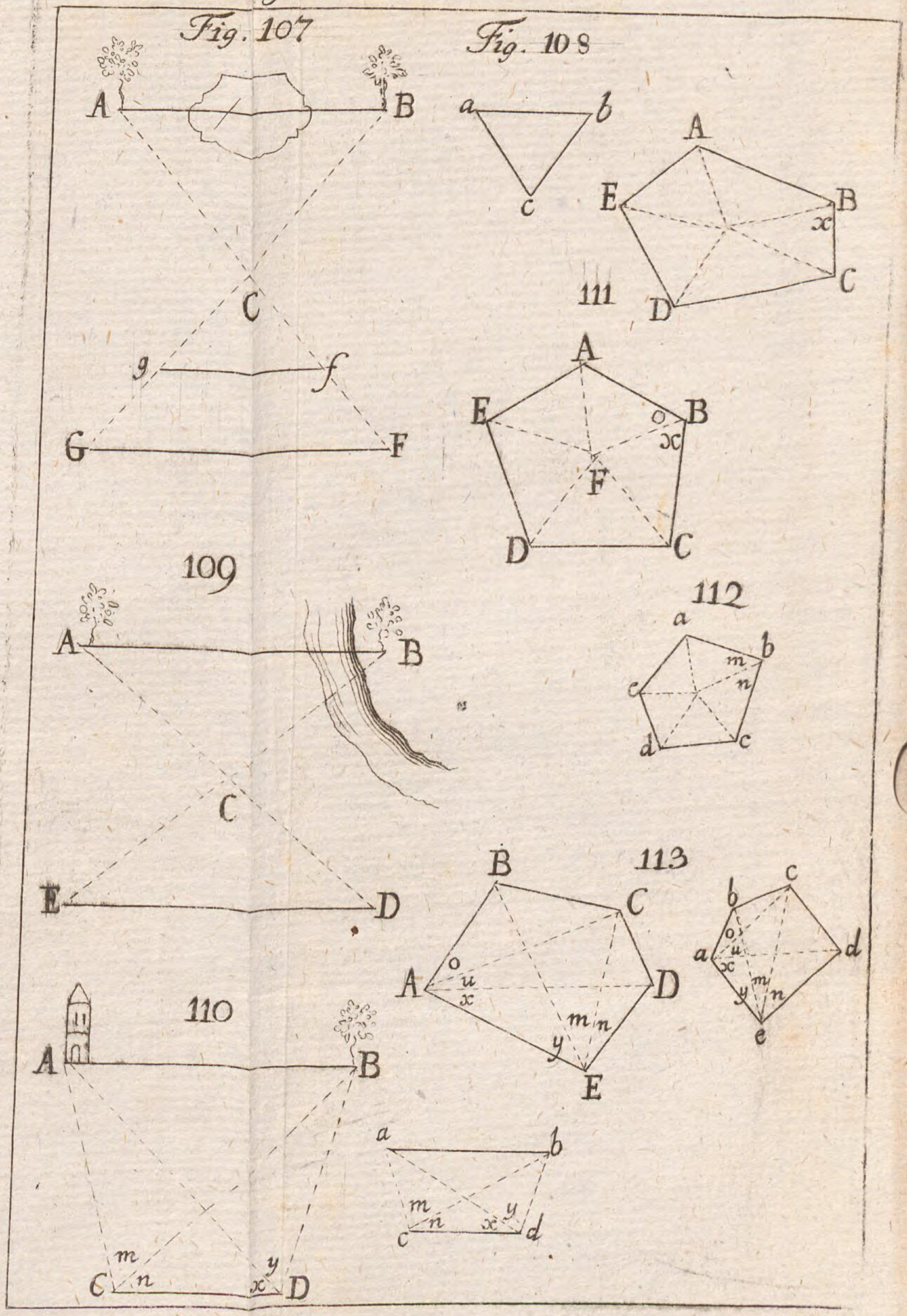


106

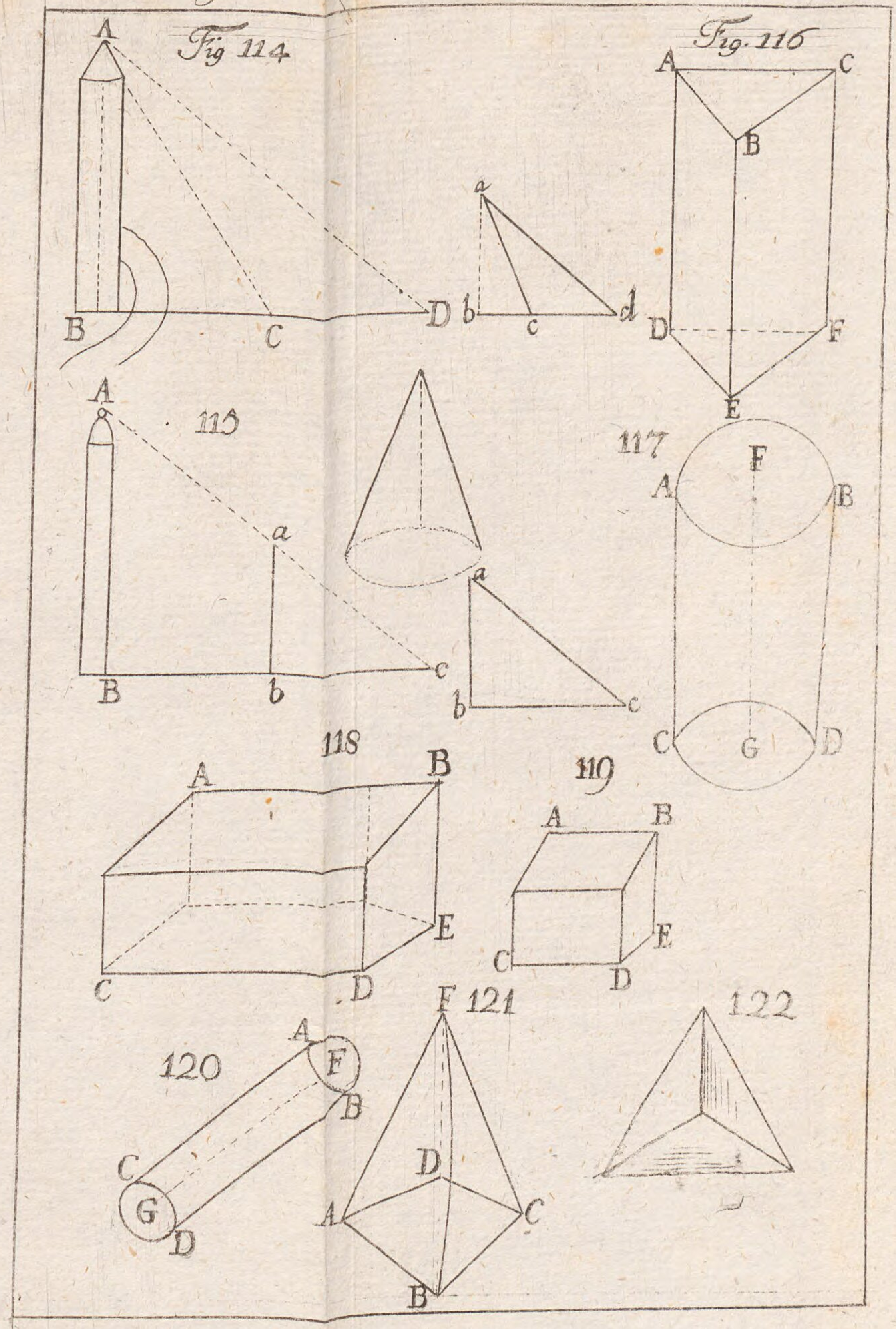



S
K
r

Tab. VIII in fine



Tab IX in fine



A

Tab. X in fine

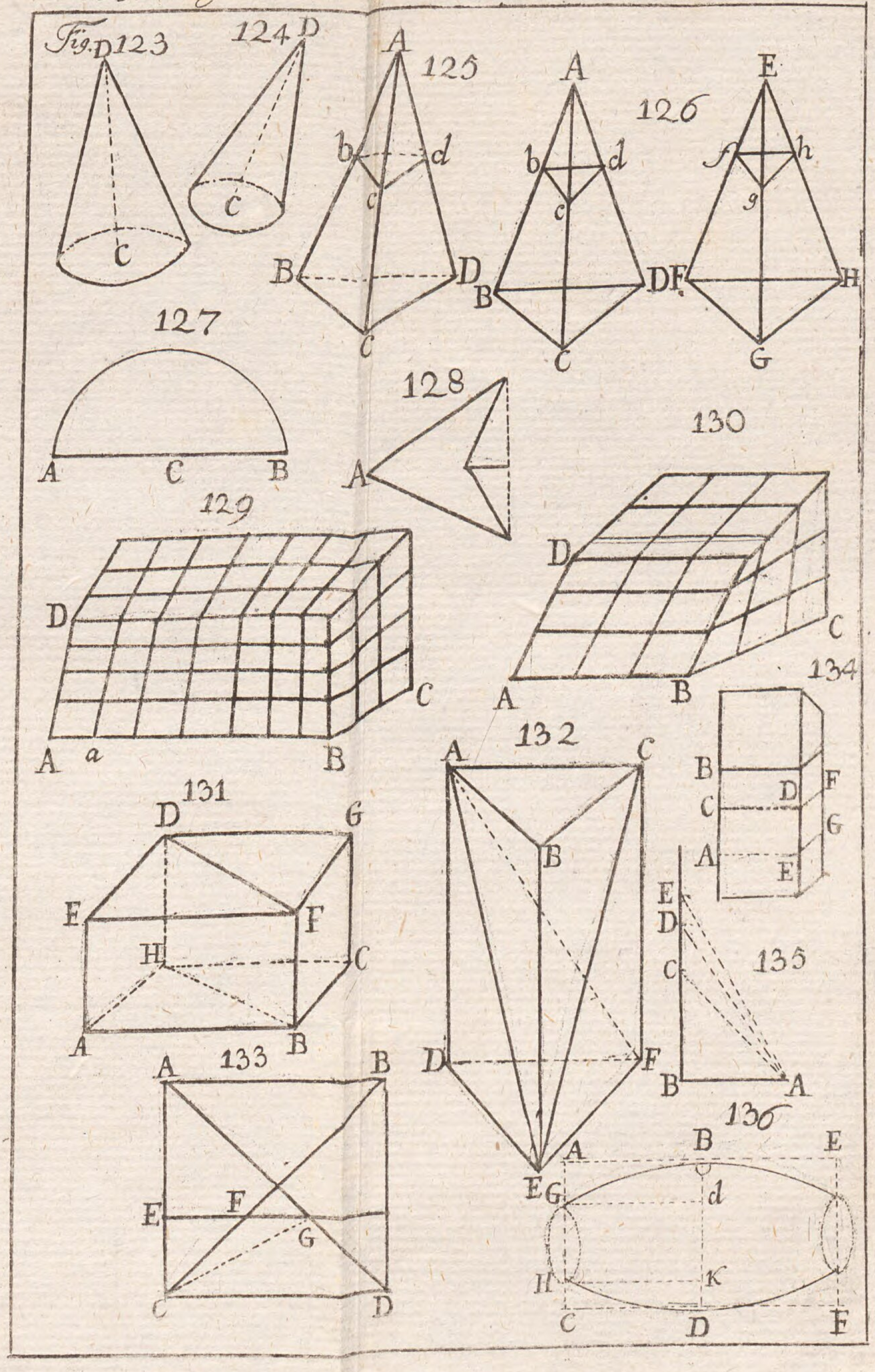
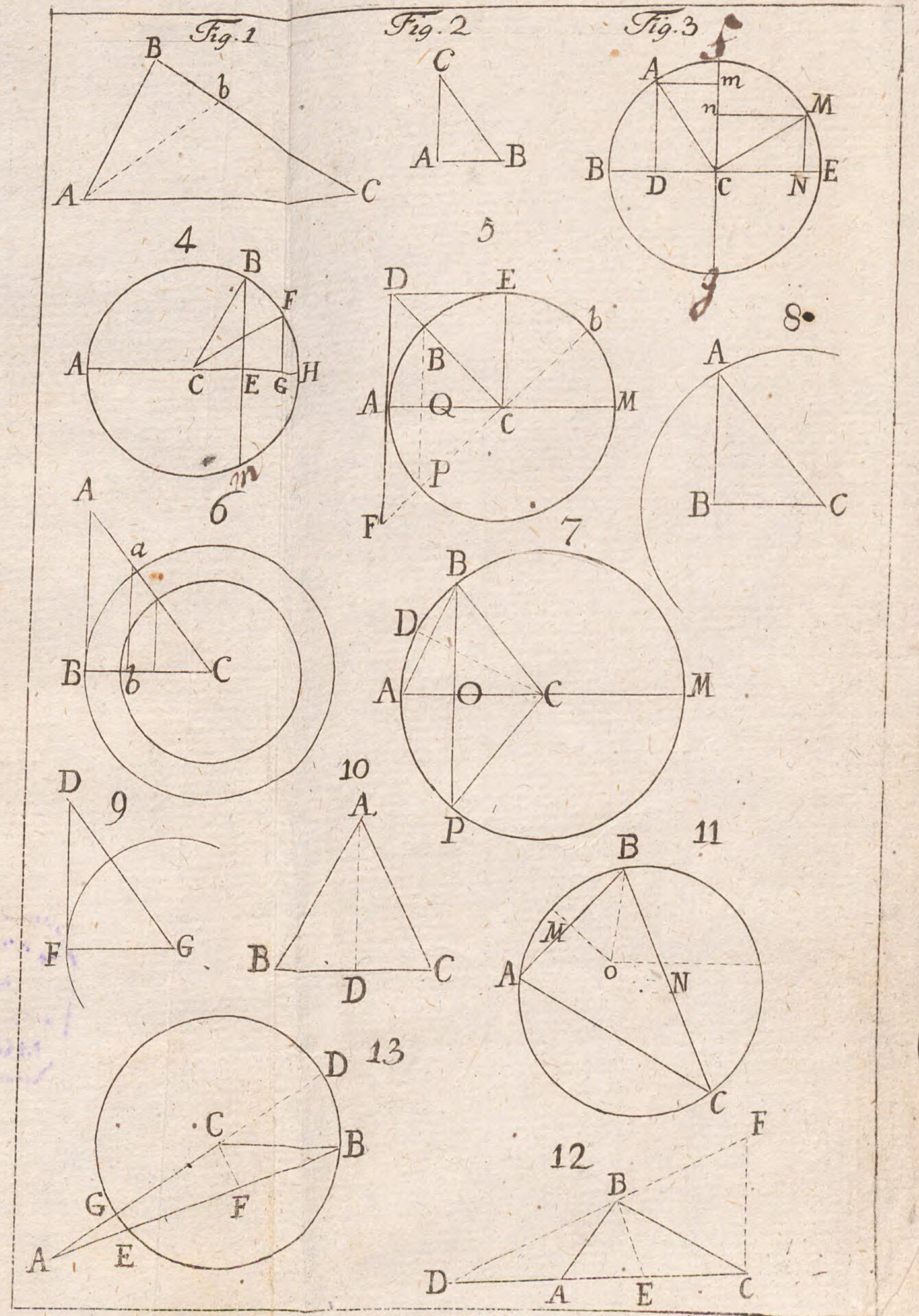
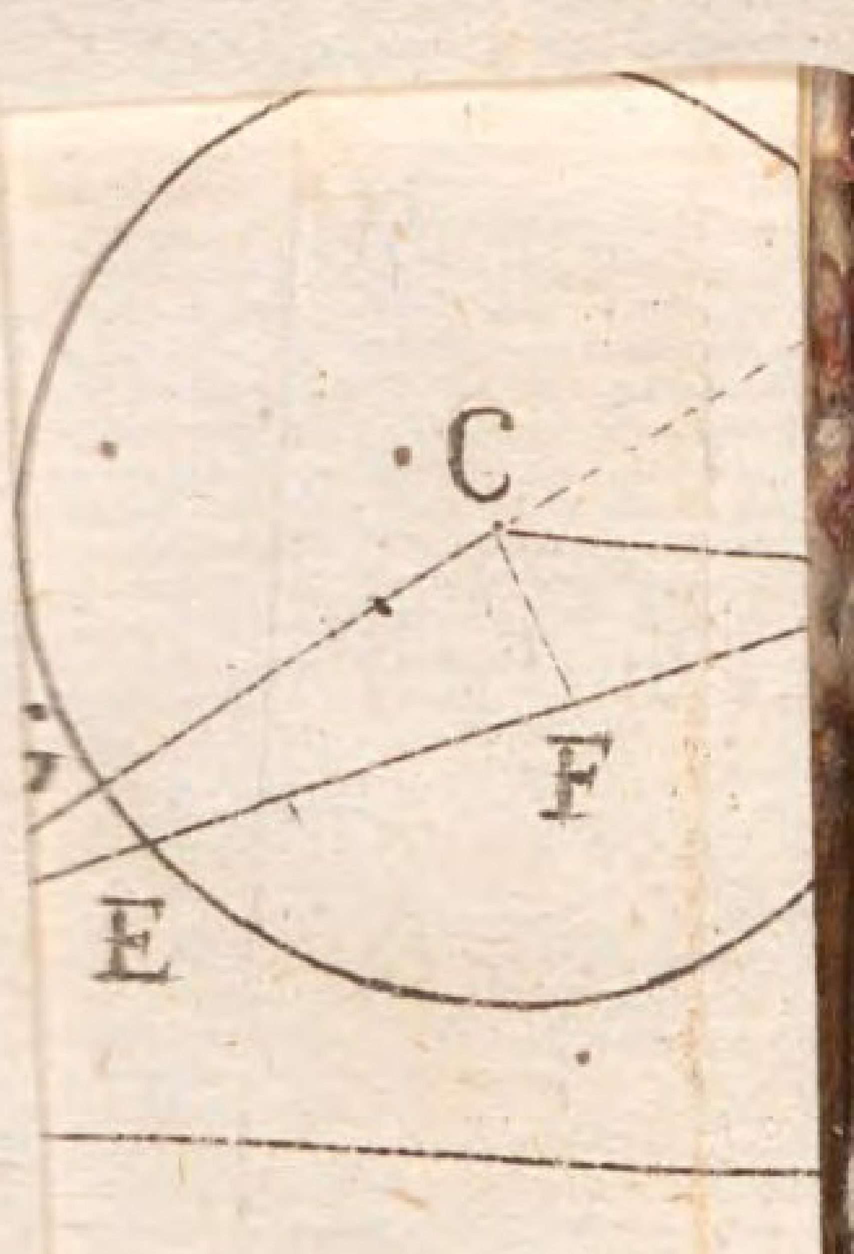


Fig. 123
D
C
124
D
C
125
A
b
d
c
B
D
C
126
A
b
d
c
B
D F
C
E
f
h
g
H
G
127
A
C
B
128
A
129
D
C
A
a
B
130
D
C
A
B
131
D
G
E
F
H
C
A
B
132
A
C
B
D
F
E
133
A
B
E
F
G
C
D
134
B
D
F
C
G
A
E
135
E
D
C
B
A
136
A
B
E
G
d
H
K
C
D
F

Tab. ad Trigonom.




C
F
E

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Gruber, Leonhard

Anfangsgründe der Geometrie und Trigonometrie zum Gebrauch der Schulen in den churbaierischen Landen

München 1776

Math.p. 5
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081377-3
VD18 10693858-002